Digitized by Google

13
7 L
25

¶ Gregorius Nyſſenus,in cuius fine eſt interpretatio Ioannis Oecolampadij.

¶ Gualtheri Tigurini,libri omnes.

H

HEnrici Bullingeri,omnia opera.

¶ Hērici Cornelij Agrippę,omnia opera

De occulta Philoſophia.

De vanitate ſcientiarum.

De peccato originali,cum alijs ibi contentis.

¶ Hermani Vodij vnio diſsidētium dogmatum, & omnia opera.

¶ Hermanni Boni, farrago pręcipuorum exemplorum de Apoſtolis,Martyribus, Epiſcopis, & Sanctis patribus veteris eccleſię.

Eiuſdem Chronica Lubeci.

¶ Hermanni Buſchij,liber de ſingulari autoritate veteris & noui inſtrumenti.

Eiuſdem Carmina addita nouo teſtamēto,per varios autores carmine reddito.

¶ Hermanni Heſsi,omnia opera.

¶ Hebręa,Caldea,& Latina interpretatio Biblię. cum indice Roberti Stephani.

¶ Hippophili Melāgei,cōpendiū Theologię.

¶ Hieronymus Cardanus,de ſubtilitate.

De immortalitate animorum.

Geniturarū,& auditu mirabilia,& notatu digna,atq; alia multa quę interrogationibus. & lectionibus pręclare ſeruiunt.

De varietate rerum.

In quadripartitum Ptolomei.

BIBLIOTECA NAZ. VITT. EM.

¶Hortulus animę abſq; nomine autoris.

Prohibentur HORAE ſequentes, quia continēt plura curioſa & ſuperſtitioſa.

¶Horæ Romanę latinæ, Pariſijs per Gulielmum Merlin, anno.1551.1546.1554.

¶Ho. Romanę latinę Pariſijs, per Tielmānum Keruer.1538.

¶Ho. Romanæ latinę Pariſijs, per Iolandam Bonhōme.1538.

¶Ho. Romanæ latinę Pariſijs, in ædibus viduæ Ioannis de Brie, anno.1549.

¶Ho. Romanæ latinæ Pariſijs, per Gulielmum Maillard.1541.

¶Ho. Romanæ latinę Pariſijs, apud Hieronymū de Marnef, anno.1555.

¶Ho. Romanæ latinę Cęſarauguſtę, ſine nomine impreſſoris, anno.1531.

¶Ho. Romanæ latinę Lugduni, per Gilbertum de Villiers.1516.

¶Ho. Romanæ latinæ Lugduni, per Petrum Fradin.1548.

¶Ho. Romanę latinę Venetijs, per Lucam Antonium Iunctam, anno.1517.1538.1542.

¶Ho. Romanę latinę Compluti, per Ioannē Brocarium.1544.

¶Ho. Romanæ latinę Antuerpię, in ædibus Ioa. Steelſij, anno.1555.

¶Horæ Beatæ Marię ſecundum cōgregationem

A
i
[.
¶H
oi
. Di
Iath

Ant

nio, contra hęreſes recens verſo.

¶Iacobi Fabri Stapulenſis, in euangelia, & epiſtolas Pauli, & canonicas, commentaria.

¶Imagines Mortis, cum Medicina animæ.

¶Index vtriuſq; Teſtamenti, pene ſimilis Indici Bibliorum Roberti Stephani.

¶Index vtriuſq; Teſtamenti, ſine autore.

¶Inſtitutio religionis Chriſtianæ, impreſſa Vuittembergæ, anno. 1536. ſine nomine autoris.

¶Inſtitutio principis.

¶Ioannis Vuiteclef, libri omnes, & dogmata.

¶Ioanis Oecolampadij, libri omnes.

¶Ioannis Pomerani, libri omnes.

¶Ioannis Caluini, libri omnes.

¶Ioannis Puperij Gochiani, libri omnes.

¶Ioannis Brentij, libri omnes.

¶Ioannis Hus. libri omnes.

¶Ioannis Cæſarij, dialectica.

¶Ioannis Pollij, Vueſtphali, omnia opera.

¶Ioannis Atrociani, omnes libri.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO E.

ita

ate.

rtini

quoſdam li-
bros Ariſtotelis.

¶Ioannis Oldendorpij, progymnaſmata forēſia.

¶Ioannis Riuij, omnes libri.

¶Ioannis Herolt, præfatio in Hugonem Eterianum de Spiritu ſancto.

¶Ioannis Sartorij, exercitus ſelectiſsimarum orationum.

¶Ioannis Sturmij de demonſtratione liber.
Eiuſdē, de amiſſa dicēdi rōne, & literarū ludis.
Epiſtola eiuſdem, de diſsidio Germaniæ.
Aliæ eiuſdem duæ epiſtolæ, de emendatione eccleſiæ, & religionis controuerſijs: vna ad Cardinales, altera ad Iacobum Sadoletum.
Eiuſdem & gymnaſij Argētoratenſis Luctus, ad Ioachimum Camerarium.

¶Ioannis Sleidani orationes duę: altera ad Carolum. V. Imp. altera ad principes Germaniæ.
Eiuſdem, de ſtatu religionis & Reipub.

¶Ioannis Rhellicani Tigurini, annotationes in C. Iulij Cæſaris, & Auli Hirtij commentaria de bello Gallico.

¶Ioannis

Collegij Romani Societatis Jesu Cat. Inscr.

HIERONYMI CAR DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,

Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod

OPVS PERFECTVM

inſcripſit, eſt in ordine Decimus.



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſ ſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

HIERONYMVS
CARDANVS MEDICVS ANDREÆ
Oſiandro uiro eruditiſs. S. P. D.

NIHIL tam animo unq; uerſaui, Andrea doctiſs. quàm ut eorum, qui de bonis literis bene merentur, nomina poſteritati commendarem. Tum uero præcipuam quandam diligentiam adieci, ſi tales cum eruditione humanitatem coniunxiſſent. Quamobrem cum te non ſolum Hebræarum, Græcarum, ac Latinarum literarum ſcientiam haud mediocrem, ſed etiam Mathematicarum habere intelligam, humaniſsimum quoq; ſemper expertus ſim, uiſum eſt, hoc meum opus, nulli melius poſſe dedicari, quàm tibi, à quo poſsit & emendari, (ſi manus mea imperium mentis tranſgreſſa fefelliſſet) & legi cum uoluptate, & intelligi, tum uero etiam cum authoritate commendari. Hoc exemplum, niſi fallor, & alij ſequentur, ac opera ſua, non niſi in ea quam tractant arte eruditis dedicabũt. Accipe ergo amoris erga te mei, & officij in me tui, tum præclaræ ſimul eruditionis tuæ perpetuum teſtimonium. Et quanq; tu talis ſis, quem tua uirtus omnibus notum faciat, tamen cum Alexander, & Cæſar, factis ſuis notiſsimi, aliorum monumentis inſcribi deſiderauerint, cunq; Plato, qui mira illa per ſeſe conderet, aliorum tamen ſcriptis laudari concupiuerit, ſpero meum hoc qualecunq; officium tibi quoq; non ingratum eſſe futurum, quòd & in his fortuna quædam dominetur, pereantq; meliora ſæpe, ſeruatis deterioribus. Et ſit modo de hoc q̃lecunq; iudicium tuum, certum mihi tamen eſt, officio meo me ſatisfacere debere. Atq; utinam contingat illuſtriore exemplo, animum meum erga omnes oſtendere, qui eo animi candore ſunt, quo te in ſtudioſos noſtri temporis fuiſſe ſemper agnoui. Sed dabitur forſan occaſio melior, etſi non detur, hanc tamen, q̃liſcunq; ſit, perijſſe mihi nolim. Vale. v. Idus Ianuarias. M. D. XLV. Papiæ.

INDEX EORVM QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

Cap. I. De duabus æquationibus in ſingulis capitulis. fol. 3
II. De numero omnium capitulorum. fol. 6
III. De æquationibus capitulorum ſimplicium. fol. 8
IIII. De ſubiectis æquationibus generalibus & ſingularibus. fol. 9
V. De inuenienda æſtimatione capitulorum compoſitorum minorum. fol. 9
VI. De modis inueniendi capitula noua. fol. 14
VII. De capitulorum tranſmutatione. fol. 17
VIII. De æſtimatione generali & ęquatione, cum media denominatio æquatur extremę & numero. fol. 21
IX. De ſecũda q̃ntitate incognita nõ multiplicata. fol. 21
X. De ſecũda quantitate incognita multiplicata. fol. 23
XI. De cubo & rebus ęq̃libus numero generaliter. fol. 29
XII. De cubo ęquali rebus & numero generaliter. fol. 31
XIII. De cubo & numero ęq̃libus rebus generaliter. fol. 31
XIIII. De cubo æq̃li q̃dratis & numero generaliter. fol. 33
XV. De cubo & quadratis æqualibus numero generaliter. fol. 33
XVI. De cubo & numero æqualibus quadratis generaliter. fol. 35
XVII. De cubo quadratis & poſitionibus æqualibus numero generaliter. fol. 35
XVIII. De cubo & rebus æqualibus quadratis & numero generaliter. fol. 37
XIX. De cubo & quadratis æqualibus rebus & numero generaliter. fol. 41
XX. De cubo æquali quadratis rebus & numero generaliter. fol. 41
XXI. De cubo & numero æqualibus quadratis & rebus generaliter. fol. 42
XXII. De cubo rebus & numero æqualibus quadratis generaliter. fol. 43

BIBLIOTECA NAZ. RC. A VITTORIO EMANUELE

XXIII. De cubo quadratis & numero æqualibus rebus generaliter. fol. 44
XXIIII. De 44 capitulis deriuatiuis. fol. 44
XXV. De capitulis imperfectis & particularibus. fol. 46
XXVI. De regulis maioribus ſingularibus. fol. 49
XXVII. De tranſitu capituli particularis in capitulum particulare. fol. 50
XXVIII. De operationibus radicum pronicarum ſeu mixtarum & allellarum. fol. 51
XXIX. De regula modi. fol. 52
XXX. De regula aurea. fol. 53
XXXI. De regula magna. fol. 54
XXXII. De regula æqualis poſitionis. fol. 56
XXXIII. De regula inæqualiter ponendi ſeu proportionis. fol. 57
XXXIIII. De regula medij. fol. 59
XXXV. De regula duplici aggregati. fol. 60
XXXVI. De regula liberæ poſitionis. fol. 64
XXXVII. De regula triplici falſum ponendi. fol. 65
XXXVIII. De regula duplici, qua excidunt partes multiplicando. fol. 66
XXXIX. De regula duplici, qua per iteratam poſitionem inuenimus ignotam quantitatē, ubi habentur 20 capitula alia generalia q̄d'q̄d. & q̄d. & rerum & numeri. fol. 72
XL. De modis ſuppoſitionum generalium ad artē magnam pertinentibus, & regulis quæ extra ordinem ſunt, tamen æſtimationibus alijs diuerſi generis ab his quæ dictæ ſunt. fol. 79

Errata quædam ſic corrigito.

Fol. 5. facie 2. uerſu 28. lege 6 quadratis p: 3.
Fol. 8. facie 2. uerſu ultimo. reliquas.
Fol. 9. facie 2. uerſu 34. ſuperficiem.

ARS MAGNA, QVAM VVLGO COSSAM VOCANT, SIVE REGVLAS ALGEBRAICAS, PER D. HIERONYMVM Cardanum in Quadraginta Capitula redacta, & eſt Liber Decimus ſui Arithmeticæ.

De duabus æquationibus in ſingulis capitulis. Cap. I.

HÆC ars olim à Mahomete, Moſis Arabis filio initium ſumpſit. Etenim huius rei locuples teſtis Leonartus Piſaurienſis eſt. Reliquit autẽ capitula quatuor, cum ſuis demonſtrationibus, quas nos locis ſuis aſſcribemus. Poſt multa uero temporum interualla, tria capitula deriuatiua addita illis ſunt, incerto authore, quæ tamen cum principalibus, à Luca Pacciolo poſita ſunt. Demum etiam ex primis, alia tria deriuatiua, à quodam ignoto uiro inuenta legi, hæc tamen minime in lucem prodierant, cum eſſent alijs longe utiliora, nam cubi & numeri & cubi quadrati æſtimationẽ docebant. Verum temporibus noſtris, Scipio Ferreus Bononienſis, capitulum cubi & rerum numero æqualium inuenit, rem ſanè pulchram & admirabilem, cum omnem humanam ſubtilitatem, omnis ingenij mortalis claritatem ars hęc ſuperet, donum profectò celeſte, experimentum autem uirtutis animorum, atq; adeò illuſtre, ut qui hæc attigerit, nihil nõ intelligere poſſe ſe credat. Huius ęmulatiõe Nicolaus Tartalea Brixellenſis, amicus noſter, cũ in certamẽ cũ illius diſcipulo Antonio Maria Florido ueniſſet, capitulum idem, ne uinceretur, inuenit, qui mihi ipſum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego uerbis Lucæ Paccioli, qui ultra ſua capitula generale ullũ aliud eſſe poſſe negat. quanq; tot iam antea rebus à me inuentis, ſub manibus eſſet, deſperabam tamen inuenire, quod quærere non audebam. Inde autem, illo habito, demonſtrationẽ uenatus, intellexi complura alia poſſe haberi. Ac eo ſtudio, auctaq; iam confidentia, per me partim, ac etiam aliqua per Ludouicum Ferrarium, olim alumnum noſtrum, inueni. Porrò quæ ab his inuenta ſunt, illorum nominibus decorabuntur, cætera, quæ nomine carent, noſtra ſunt. At etiam demonſtrationes, præter tres Mahometis, & duas Lodouici, omnes noſtræ ſunt, Singulæq; capitibus ſuis præponentur, inde regula addita, ſubijcietur experimẽtum. Et quanq; longus ſermo de his haberi poſ-

ſet, ac innumera capitulorum ſeries ſubiungi, finem tñ exquiſitæ conſiderationi in cubo faciemus, cætera, etiã ſi generaliter, q̃ſi tamen per tranſennam tractantes. nanq; cũ poſitio lineam, q̃dratum ſuperficiẽ, cubus corpus ſolidũ referat, næ utiq; ſtultũ fuerit, nos ultra progredi, quo naturæ nõ licet. Itaq; ſatis pfecte docuiſſe uidebitur, qui oĩa, quæ uſq; ad cubum ſunt, tradiderit, reliq̃ quæ adijcimus, quaſi coacti aut incitati, nõ ultra tradimus. In omnibus autẽ præcedentium, ac maxime librorũ tertij ac quarti, meminiſſe operæprecium fuerit, ne uel iterum tradendo nugax efficiar, aut obſcurior prætermittendo.

2 Iam eñ docuiſſe nos meminimus, quę ſint impares, aut pares denominationes. Nanq; q̃dratum, & q̃dratum q̃drati, cubumq́; quadrati, ac deinceps una ſemper intermiſſa. Pares, rem aũt ſeu poſitionem, cubum, primum ac ſecundum nomen, impares uocamus denominationes. At uero quòd tam ex 3, quàm ex m: 3, fit 9, quoniam minus in minus ductũ ꝓducit plus. At in imparibus denominationibꝰ eadẽ ſeruatur natura: nec plus niſi ex uero numero fiet: nec cubus, cuius æſtimatio ſua ſit m: ſeu quòd dicimus debitũ, ex poſitione ulla numeri ueri ꝓduci poteſt, iam meminiſſe oportet dilucidius explicatũ.

3 Si igitur par denominatio, numero æqualis ſit, rei æſtimatio duplex eſt, m: & p: alteraq́; alteri æq̃lis, uelut, ſi q̃dratum æquetur 9, res eſt 3, uel 3 m: & ſi æquetur 16, res eſt 4, uel m: 4, & ſi q̃dratum q̃drati ęquetur 81, rei ęſtimatio eſt 3, uel m: 3. Cõponere autem pares denominationes nõ eſt admodum neceſſarium, quia q̃d. quadratum ad deriuatiua capitula pertinet, uerũ ſi diligenter hæc, quæ ſcribam, animaduerteris, cũ hac regula etiam uoto tuo ſatisfacies, nam cum q̃dratum & q̃d^ti q̃dratũ numero æquantur, eadem erit ratio, quę in ſimplici, duplex ęquatio ſcilicet, altera p: altera m: inuicemq́; ęq̃les, uelut 1, q̃d^ti q̃dratum p: 3 q̃dratis æquantur 28, poſitio ualet 2 uel 2 m: At uero, ſi q̃d^ti q̃dratũ & numerus, ęqualia ſint q̃dratis, demonſtrabimus ſanè in capitulo octauo, duas eſſe rei ęſtimationes ueri numeri, totidem aũt habebit per m: ſingulas ſingulis correſpondentibus æq̃les, uelut ſi dicam 1 q̃d^ti q̃d^m p: 12, æquatur 7 q̃dratis, poſitionis æſtimatio eſt, uel 2, uel m: 2, uel ℞ 3, uel m: ℞ 3, & ſic ſunt q̃tuor æq̃tiones. Quòd ſi caruerit ęſtimatiõe uera, carebit etiam ea, quę eſt per m: uelut 1 q̃d^ti q̃d^m p: 12, æq̃tur 6 q̃d^tis, quia non poteſt æquationẽ ueram habere, carebit etiam ficta, ſic eñ uocamus eam, quæ debiti eſt ſeu minoris. At uero ſi q̃d. q̃d^m numero & q̃dratis æquale ſit, una ſemper eſt rei uera æſtimatio, altera ei æqualis, ficta, uel per m: uelut 1 q̃d^ti q̃d^m æquetur 2 q̃dratis p: 8, rei ęſtimatio eſt 2, uel m: 2. Eadem igitur ratio in cæteris

ris paribus omnibus denominationibus inter ſe,cũ numero iungunt,
at hoc per depreſsionem quomodo fiat,in 4° libro plene docuimus.
At imparium denominationum, una tantum æquatio uera eſt, 4
nulla ficta,cũ ſolæ numero cõparantur,uelut duæ res æquantur 16,
æſtimatio rei eſt 8,duo cubi æquantur 16,æſtimatio rei eſt 2, ſemper
autem numerus cui comparantur denominationes , in hoc capitulo
uerus,non fictus ſupponitur,quid enim tam ſtultum, quàm funda-
mentum ipſum infirmare,quanquam tamen ratio oppoſita, in oppoſitis
eſſet perſequenda,eadem igitur eſt ratio,ubi plures denominationes
numero comparantur,etiamſi mille forent,una erit æſtimatio rei ue-
ra,& nulla ficta,uelut 1 cubus p:6 poſitionibus,æquatur 20, rei æſti-
matio nulla eſt præter 2,neque uera neque ficta.

Cum uero duæ denominationes cum numero comparantur, aut 5
ambæ impares, & comparatio fiet ad extremam,uel ad mediam,nam
de ea quæ fit ad numerum,iam in præcedenti regula dictum eſt, uel
altera impar,altera par,nam de utraque pari,in tertia regula generali-
ter diximus. Si igitur extrema denominatio,cubus ſcilicet, cũ nume-
ro mediæ,id eſt poſitionibus comparetur, uide an ex duabus tertijs
numeri Rerum in radicem tertiæ partis eiuſdem numeri fiat ducen-
do,numerus propoſitus aut maior, aut minor,ſi igitur fiat numerus
propoſitus præciſe,æſtimatio rei eſt duplex,& una uera,ſcilicet ℞ ip
ſa,quæ ducta eſt. Exemplum,cubus p:16,æquatur 12 poſitionibus,
ducto igitur 8,qui eſt $\frac{2}{3}$ de 12,numero rerum,in 2 radicem 4,qui eſt
$\frac{1}{3}$ numeri rerũ,fit 16,numerus æquationis propoſitus, æſtimatio igi-
tur eſt 2,radix 4,& alia eſt ęſtimatio ficta, & eſt correſpondens uerę,
cubi æqualis eiſdem rebus,& eidem numero,ut in exemplo, ſi cubus
æquatur 12 rebus, p:16 numero,uera æſtimatio eſt 4,igitur ſi cubus
p:16 ęquatur 12 poſitionibus,ęſtimatio rei eſt m:4, nam 12 res ſunt
m:48,& cubus m:4 eſt m:64,cui addito 16, fit m: 48. Quod ſi pro-
ductum ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in ℞ tertiæ partis eiuſdem numeri,ſupe-
ret numerũ æquationis propoſitũ,tunc capitulum habebit tres æqua
tiones,duas ueras,& tertiam fictam. Exemplũ, 1 cubus p:9, ęquetur
12 rebus,una æquationum uera eſt 3,alia ℞ 5 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$, tertiam ficta
ex his ſemper aggregatur,& reſpondet æſtimationi cubi ęqualis eiſ-
dem rebus & eidem numero ueræ,& eſt ℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$ & ita reliqua fi-
cta,de qua diximus,in alio exẽplo, aggregatur ex duabus ueris, ſed
quia ueræ ſunt inuicẽ æquales,ideo ficta ſemper dupla eſt ueræ. Ma
nifeſtum eſt igitur,quòd falſæ æquationes ſeu fictæ, capituli cubi &
numeri æqualium rebus,reſpondent æquationibus ueris capituli cu-
bi æqua-

bi æqualis rebus & numero,ubi res & numerus ſint idẽ. At uero ubi ex tali multiplicatione ℞ tertiæ partis numeri rerum, in duas tertias eiuſdem numeri fiat minus numero propoſito,tũc nulla erit æquatio uera ſed una ficta,æqualis ueræ capituli cubi æqualis totidem rebus & eidẽ numero,uelut 1 cubus p: 21 æquatur 2 rebus, quanq̃ careat uera ęquatione,ficta tamen eſt m: 3, & hæc eſt æſtimatio uera cubi æqualis duabus rebus ac numero uiginti uno.

6 Ex his non difficile eſt uenari,quot æquationes habeat capitulũ cubi æqualis rebus & numero. Si igitur ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in radicem tertiæ partis eiuſdem,fit numerus propoſitus, capitulum habet duas æquationes,ueram æqualem fictæ præcedentis regulæ, & fictã æqualem ueræ,ideo uera eſt dupla fictæ, quia ibidem ficta eſt dupla ueræ,ut 1 cubus æquatur 12 rebus & 16 numero, æquatio uera eſt 4,& ficta eſt m: 2,quia ſi 1 cubus p: 16,æquatur 12 poſitionibus,æſtimatio uera eſt 2,& ficta m: 4. Quod ſi ex dicta multiplicatione,proueniat plus numero æquationis,æſtimatio uera erit una, reſpondens falſæ præcedentis regulæ,& falſa duplex, utraqꝫ reſpondens ueræ, præcedentis regulæ,ut ſi cubus æquetur 12 poſitionibus p: 9,æſtimatio falſa utraqꝫ eſt,℞ $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$ m: & 3 m: & uera eſt ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$, & ita uides,qualiter falſæ ueris,& ueræ falſis ſibi inuicem reſpondent, ex ambabus autem falſis cõflatur uera,nam ex ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$ & 3,fit ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$. Quod ſi ex tali producto fiat minus numero æq̃tionis,æſtimatio eſt una tantũ,& uera,ſicut in pręcedenti regula eſt una tantũ,& ficta,uelut ſi cubus æq̃lis ſit duabus rebus & 21 numero,æquatio eſt 3,ſicut in cubo p: 21 æquali duabus rebus æſtimatio ficta eſt m: 3.

7 In capitulis aũt in quibus æquantur inuicem numerus & denominatio par & impar,aut par eſt extrema,ut quando q̃d^m & poſitio, & numerus æquantur inuicem aut denominatio extrema eſt impar,ut quando cubus & q̃d^m æquantur numero, ſi igitur q̃d^m æquatur poſitionibus & numero,habebit duas æquationes,unam ueram æq̃lem fictæ,capituli q̃drati & rerũ earundem æq̃lium eidẽ numero, & aliam fictam ęq̃lem uerę alterius capituli. Exemplũ, Si q̃d^m & 4 poſitiones, æquantur 21,æſtimatio uera eſt 3,& ficta m: 7, & ſi q̃d^m æquatur 4 poſitionibus,& 21,ęſtimatio uera eſt 7,& ficta m: 3,ideo habitis ueris,mutuo habentur fictæ,quemadmodum in præcedenti regula,ſed diuerſo modo,nam hic extrema extremis,ibi media extremis comparantur. Nam ibi capitulum cubi & numeri æq̃lis rebus, cõparatur capitulo cubi ęqualis rebus & numero,hic capitulum q̃drati & rerum æqualium numero, cõparatur capitulo q̃d^ti æq̃lis rebus & numero.

At

At quando quadratũ & numerus æquantur rebus, & caſus eſt poſsibilis, tunc ſunt duæ ſolutiones ueræ, ut dicendo quad^{m} p: 12. æquatur 7 poſ^{bus}, poſitio poteſt eſſe 4. uel etiam 3. nam in utroq; uerificatur, niſi quando numerus eſt æqualis quadrato dimidij numeri radicum, nam tunc ſolum eſt una ęquatio, ſcilicet dimidium numeri ipſarum radicũ. In hoc autem capitulo nunq̃ poteſt eſſe ſolutio ficta, nec æquatio per minus. ſed ubi eſt ſolutio per uerum numerum, eſt duplex, ubi caret ſolutione uera, nõ tamen magis poteſt ſolui per æquationem fictam.

Si uero ęquatio quæratur in capitulis cubi, quadratorum, & numeri, tunc ſi cubus æquatur quadratis & numero, tunc eſt una tantum ſolutio uera, uelut ſi dicam, cubus æquatur tribus quadratis p: 16. res ualet 4. & non poteſt alia inueniri. 8

NOTANDVM. In omnibus autem capitulis in quibus eſt una tantum ſolutio, æquatio eſt facilior inuentu, & nitidior, uelut in capitulo cubi & rerum æqualium numero, & cubi æqualis quadrato & numero, & in capitulo cubi æqualis rebus & numero, ubi productio illa ex $\frac{2}{3}$ numeri in ℞ tertiæ partis eſt minor numero. Idem dico, ubi cubus cum numero æquatur rebus, & non poteſt haberi niſi ficta æquatio, reliquæ autem in quibus multiplex eſt æſtimatio rei, ſunt difficiliores & confuſæ. Not^{m}.

Si igitur cubus & quadratum, æquantur numero, tunc æſtimatio rei eſt una tantũ per plus, ubi ex $\frac{1}{3}$ numeri quad^{m} in quadratum duarum tertiarum eiuſdem numeri fiat minus numero æquationis, & hæc æſtimatio eadem eſt fictæ, correſpondenti capitulo cubi & numeri æqualium quadratis ſub eadem quantitate. Exemplũ. Cubus & tria quadrata æquantur 20, tunc quia ex 1 tertia parte nnmeri quadratorum, in 4 quadratũ duarum tertiarum fit minus quàm 20, dico quod non eſt niſi una æquatio, & res ualet 2, & hęc eſt æſtimatio per m: cubi p: 20, ęqualis tribus quadratis. Vbi uero ex ea multiplicatiõe talis numerus poſsit produci, erit una æſtimatio uera, & duæ fictæ, & uera correſpondebit fictę alterius capituli, & rurſus fictæ ueris. Exemplũ, ſi dico, cubus & 11 quadrata æquantur 72, res eſt ℞ 40 m: 4, pro uera æſtimatione, ſed pro ficta eſt 3 m: uel ℞ 40 p: 4 m: Et ſi cubus cum 72 æqualis ſit 11 quadratis, æſtimationes ueræ ſunt 3. uel ℞ 40 p: 4. & ficta eſt ℞ 40 m: 4 m: Ideo quærendo fictam ſemper quærimus ueram, & correſpondentem alterius capituli.

Notum eſt autem ex hoc, quod capitula quædam habent duas, quædam unam æſtimationem, & quando habet tres, in una parte ca- Not^{m}.

pituli,habent poſtmodum unam tantum in reliqua , uelut capitulum cubi æqualis rebus & numero in parte inferiore, & capitulum cubi & quadratorũ ęqualium numero,& capitulum cubi & numeri ęqualium quadratis aut rebus,nam in una parte habent tres æquationes,in alia unam tantum,& ſimiliter capitulum quad'quadrati & numeri æqualium quadrato: in una parte habet quatuor æquationes, in alia poſtmodum nullam,quædam uero habent duas per totum , ut capitulum quadrati & rerum æqualium numero, aut capitulum quadrati æqualis rebus & numero,quæ uero habent unam , ſunt,ut capitulum cubi & rerum æqualium numero , & capitulum quadrati & numeri æqualium rebus , quod habet duas æquationes in una parte , in alia poſtmodum nullam.

Not^{m}. Et ſcias,quod æquationes capitulorum,cubi & quadratorum ęqualium numero,item cubi & numeri æqualium quadratis,ſic ſe habent, quod differentia æquationum uerarum & fictarum ſemper eſt numerus quadratorum,uelut,ſi cubus & 72 æquantur 11 quadratis,æquatio ficta eſt ℞ 40 m:4,ueræ ſunt ℞ 40 p:4.& 3. differentia,℞ 40 m: 4 & 7 p:℞ 40.eſt 11 numerus quadratorum , & ita , ſi cubus & 11 quadrata æquentur 72 numero.

9 In his autem capitulis,quæ duplici denominatione , impari & una pari ac numero conſtant,ſi cubus & res,æquales ſint,quadratis & numero, æquationes poſſunt eſſe tres , & omnes ueræ , & nulla ficta, quia ut dictum eſt,minus cum ad ſolidum deducitur, fit minus,& ita minus æquale eſſet plus, quod eſſe non poteſt.

Vbi uero cubus,quadratũ, & res, æquales ſint numero, tunc tres etiam erunt æquationes,altera p:duæ m:& hoc, ſi ſub eiſdem denominationibus quadrata æquari poſſunt rebus numero & cubo , & æquationes ueræ hic,ſunt fictæ in illo exemplo , 1 cu^{b} p: 6 quad^{ta}, 3. rebus,ęquatur 18,tunc rei uera æſtimatio habetur ex capitulo ſuo,deinde habet æſtimationes fictas capituli,1 cub. p:3 rebus p:18 æqualium 6 quadratis,& una earum eſt 3,alia ℞ 8 $\frac{1}{4}$ p:1 $\frac{1}{2}$, igitur m: 3. uel m: ℞ 8 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$. eſt æſtimatio ficta , 1 cub. p: 6 quad^{ta} p: 3 poſ^{to} æqualium 18.& cum hoc eſt etiam tertia æquatio uera.

Ex hoc habentur tres æquationes capituli, cubi, rerum , & numeri,æqualium quadratis,ubi æquatio poſsibilis , cognoſcitur autẽ hoc ex ſuis capitulis,earum igitur duæ ueræ ſunt & æquales, ut dictũ eſt, æquationibus capituli totidem quadratorũ & rerum & cubi æqualiũ numero eidem,ut in exemplo dicto,tertia autem ueræ reſpondet alterius capituli,& eſt ficta,ideo æquatio capituli 1 cu^{bi} p;6 quad^{ti} p: 3, poſ^{to},

poſ^{ni} uera eſt æquatio per m: capituli, 1 cu^{bi} p: 3 rebus p: 18 æqualiũ
6 quadratis. At ubi quadratorum numerus minor ſit quàm ut poſsit
æquari cubo rebus & numero, in capitulo cubi quadratorũ rerum æ-
qualium numero, tunc una eſt æquatio uera nulla ficta, at in capitulo
quadratorum æqualium cubo rebus & numero, una ficta, & nulla ue
ra, uelut dicendo, 1 cub. p: 1 quad^{to} p: 2 rebus æquantur 16, rei uera
æſtimatio eſt 2, & hæc eſt ficta æquatio cubi & duarum rerum & 16
æqualium 1 quad^{to}. Manifeſtũ igitur eſt, capitula cubi, quadratorũ,
rerum, æqualium numero: etiam cubi rerum & numeri, æqualiũ qua-
dratis inuicem ſibi reſpondere.

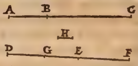
Pariter capitulum cubi, æqualis quadratis, rebus, & numero, re- 10
ſpondet capitulo, cubi, quadratorum, & numeri, æqualium rebus,
ideoq; ubi res admodũ paucę ſunt, eſt æquatio una ficta, æqualis ue-
ræ correſpondenti alterius capituli cubi æqualis totidem quadratis,
rebus & numero. Exemplũ. Si cubus æqualis ſit 2 quad^{tis} 1 poſ^{oni} 6,
numero, res ualet 3, nec plus aut minus, quia ſi cubus & 2 quad^{ta} & 6
numerus, æquentur uni poſitioni, nulla poteſt æquatio uera eſſe, ſed
ficta erit m: 3. quæ erat uera in alio capitulo. Quod ſi res tot ſint, ut
capitulum cubi, quadratorum, numeri, æqualium rebus, poſsit habe-
re æquationem ueram, tunc æquatio uera duplex erit, & una ficta,
correſpondentes duabus fictis, & uni ueræ alterius capituli. Exem-
plũ. Si cubus & 3 quad^{ta} & 6 numerus, æquales ſint 20 rebus, duæ
erunt æquationes ueræ, ſcilicet 3, & ℞ 11 m: 3, & una ficta, ſcili-
cet ℞ 11 p: 3 m: Igitur æſtimatio cubi, æqualis 3 q̃d^{tis}, 20 reb. 6 nu-
mero, uera eſt, ℞ 11 p: 3, & duæ fictæ erunt, 3 m: & ℞ 11 m: 3 m:.

Eadem ratione capitula cubi & quadratorũ æqualium rebus & 11
numero, & cubi ac numeri æqualiũ q̃d^{tis} & rebus, ſibi inuicẽ reſpon-
dent. Vbi igitur capitulum cubi & numeri æqualium rebus & q̃dra-
tis nõ habet æquationem ueram, habebit unam tantum fictam, æqua
lem ueræ alterius capituli. Exemplum. 1 cubus p: 72, æquatur 6 qua
dratis p: 3 rebus, rei ficta æſtimatio eſt, m: 3, & hæc eſt uera, unius
cubi & 6 quadratorum æqualium 3 rebus & 72, Et ſicut capitulum
1 cu^{bi} p: 72 æqualium 6 q̃d^{tis} p: 3 rebus, caret uera æſtimatione, ſic ca
pitulũ 1 cubi p: 6 quadratis æqualiũ 3 rebus p: 72, caret ficta, at ubi
capitulum cubi & numeri æqualium quadratis & rebus habet ueram
æſtimationem, habebit duplicem, & unam fictam, correſpondentes
duabus fictis, & uni ueræ alterius capituli. Exemplũ, cubus p: 4 æq̃-
lis ſit 3 q̃d^{tis} p: 5 rebus, tunc ueræ æſtimationes ſunt 4, uel ℞ 1 $\frac{1}{4}$ m:
$\frac{1}{2}$, ficta uero eſt, ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ m: & hæc eſt uera æſtimatio capituli cu

bi & 3, quadratorum æqualiũ 5 rebus & 4 numero, & reliquæ duæ, ſcilicet 4 & ℞ $1\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ ſunt m: in eodem caſu & fictæ.

12 Eſt etiam manifeſtum, quod ſi q̄d'q̄d'ᵗᵃ & res & numerus comparentur, regula ſeptima in eis præciſe locum habebit, ſicut in quadrato rebus & numero, conferendo capitula capitulis, eadem ratio in reliquis deriuatiuis. DEMONSTRATIO.

13 Etiam oportunum eſt, ut oſtendamus hæc demonſtratione, quod etiã in toto hoc libro facturi ſumus, ut rebus tã admirabilibus, ultra experientiam, fidei ratio accedat. Sit igitur gratia exempli, A B cubus, cũ B C numero æqualis D E quad^{tis} cum E F rebus, & ſit H æſtimatio uera, quia igitur ex ſuppoſito, A C æquatur D F, ſiat D G



æq̃lis A B, quia igitur D E ſuperat A B, in G E, & B C eſt æqualis G F, ex cõmuni animi ſententia, erit B C, maior F E in G E, & q̃lis exceſſus D E ſuper A B, talis B C, ſuper E F. Ponat̃ igitur H minus, & ficta æquatio, erit igitur A B & E F, m: ſed D E, & B C, remanent p: q̃a igitur differentia A B & D E, eſt G E, & differẽtia B C & E F, eſt etiam G E, & tantũ eſt detrahere A B ex D E, & E F ex B C, quantũ addere eas tanq̃ m: ſequit̃ quod poſita ęſtimatiõe poſitionis, m: H, quod A B, cũ D E ęquatur B C cum E F, utrumq; enim aggregatum eſt reſiduũ G E, igitur cubus cũ quadratis, ęquatur rebus & numero eodẽ modo, & rei æſtimatio eſt m: H, quantum ſcilicet in alia æquatione fuit idem in aliјs.

Sequitur etiam, quod aggregatum partium in uno, eſt æquale differentiæ mutuæ in reliquo, uelut ſi dicam, cubus & 10 æquantur 6 quadratis & 8 rebus, & æſtimatio in hoc capitulo ſit uera, erit in capitulo cubi & 6 quadratorũ æqualium 8 rebus & 10 numero in ficta æſtimatione, aggregatum ex cubo & 6 cenſibus, æquale differentiæ cubi & 6 cenſuum in uera æſtimatione, uel 10 & 8 rerum in eadẽ uera æſtimatione, & tantum erit aggregatum 8 rerum & numeri in ficta æquatione.

De numero omnium capitulorum. Cap. II.

1 AT capitula, quæ generaliter ſcire conuenit, uſq; ad ſolidum extenduntur cubum, ſimplicia uero, quoniam unius ſunt generis, in unum contraximus, quanquam ipſum uſq; in infinitum extendatur. Quæ uero cum numero quadratum & poſitionem habent, tria ſunt, & quamuis duas ſortia

tur

tur æſtimationes unum eorum,quia tamen ſimul illæ cōiunctæ ſunt, tria tantum dicemus eſſe capitula, At uero cubi & rerum & numeri tria,uerum cum unum illorum duas habeat æquationes, in quatuor euadūt,totidem fiunt ex cubo quadratis & numero,iam igitur duodecim. At cubi quadratorum poſitionum ac numeri,ſeptem, in eorū autem quatuor geminæ æquationes, quare undecim fient capitula omnia,igitur prima & generalia uiginti tria, horum primo præter miſſo,quodlibet deriuatiua duo ſibi iungit,alterum quadrati, alterū cubi ratione,erūt igitur generalia deriuatiua quadraginta quatuor. Poſt hæc duo alia ſunt ignotæ quantitatis, alterum cum multiplicatur,alterum cum per ſe ſumitur. eſt præterea unum generale mediorum. omnium igitur primorum notabilium numerus uiginti ſex, deriuatiuorum quadragintaquatuor, omnium collectio ſeptuaginta. Poſt hęc autem cum plura alia etiam ſingularia adiecimus,ſed eorum maior uoluptas ꝙ neceſſitas, ea igitur non inter hæc numerabimus.

Horum autem neceſsitas ſic colligitur, cum lineæ ſuperficiebus, aut ſuperficies lineis cognoſcuntur,q̄dratorū,poſitionum, ac numeri capitula oportuna ſunt,at ſi ex latere Tetragonico aut Solido,capitulum ſimplex, cum uero trium ignota duo ſupponuntur,eaq́; ad ſuperficies ac lineas pertinent,quantitatis ignotæ,& rei, capitula exploranda erunt,atq; ea ſimpliciter,ſi lineæ lineis comparantur, producta uero,cum ſuperficiebus,at ſi lineis corpora comparanda,cubi rerum & numeri,ſi corporibus,ſuperficies cubi q̄dratorum & numeri, ſin autem ſuperficierum & corporū & linearum ratio ſit quærenda, capitula cubi q̄dratorum poſitionum & numeri ſunt utiliora. Porrò in his omnibus ad numerū ſemper comparatio fiet. Hæc ratio præcipua eſt,quanq; perſæpe omnibus in unoquoq; horum uti neceſſariū ſit, operæprecium tamen fuerit,ſingula hæc deſcribere, deriuatiuaq́; ſuis adiungere primitiuis. ſunt autem hæc. a

Capitula primitiua carentia deriuatiuis.

Numerus æqualis rebus,uel numerus æqualis q̄dratis,uel numerus ęqualis cubis,uel numerus æqualis q̄d'q̄d^{to}, uel numerus ęqualis nomini ſeu relato primo,ac ita deinceps comparando numerum cuicunq; denominationi. 1

Numerus & q̄d^{ta} æqualia rebus,uel numerus & cubus æq̄lia rebus,uel numerus & cubus æq̄lia q̄d^{tis},uel numerus & q̄d'q̄d^{ta} æqualia rebus,uel numerus & q̄drati q̄d^{ta} æqualia q̄d^{to}, uel numerus & q̄d'q̄d^{ta} æqualia cubis, uel numerus & nomen primum æq̄lia rebus aut q̄dratis aut cubis & ſic abſq; fine. 2

3 Numerus & poſitio, & ignota quantitas.

4 Numerus & q̄dratū poſitionis, & ignota quantitas, ſeu numerus & q̄d^{rum} quantitatis ignotæ & poſitio, ſeu numerus cū q̄d^{to} poſitionis quantitatis ignotæ, ſeu numerus & productum ex poſitione in quantitatem ignotam, cum altera earum, uel cum q̄drato unius earum.

Capitula primitiua.	Capitula deriuatiua.
1 Numerus æqualis q̄d^{to}	1 Numerus æq̄lis q̄d'q̄d' & q̄d'.
& rebus.	2 Numerus æqualis cu'q̄d' & cub'.
2 Numerus & res æqualia	3 Numerus & q̄d' æquales q̄d'q̄d'.
quadrato.	4 Numerus & cub' æq̄les cub'q̄d'.
3 Numerus & q̄d' ęqualia	5 Numerus & q̄d' q̄d' æqualia q̄d'.
rebus.	6 Numerus & cub'q̄d' æq̄lia cub'.
4 Numerus æqualis cubo	7 Numerus æq̄lis q̄d' & cub'q̄d'.
& rebus.	8 Numerus æq̄lis cub' & cubo cubi.
5 Numerus & res æqua-	9 Numerus & q̄d' æq̄lia cub'q̄d'.
lia cubis.	10 Numerus & cub' æq̄lia cub'cub'.
6 Numerus & cubus æq̄l'	11 Numerus & cub'q̄d' ęq̄l' q̄d' ęq̄^{o} pri^{a}.
rebus æq̄tio prima.	12 Nu$^{r'}$ & cub'cub' æq̄lia cub' ęq̄^{o} pri^{a}.
7 Numerus & cub' ęq̄lia	13 Nu$^{r'}$ & cub' q̄d'ęq̄lia q̄d' ęq̄^{o} ſecunda.
rebus ęq̄^{o} ſecunda.	14 Nu$^{r'}$ & cub'cub' ęq̄lia cub' ęq̄^{o}ſecūd^{a}.
8 Numerus ęq̄lis q̄drato	15 Numerus ęq̄lis q̄d'q̄d' & cub'q̄drati.
& cubo.	16 Numerus ęq̄lis cub'q̄d' & cub'cubi.
9 Numerus & q̄dratum	17 Numerus & q̄d'q̄d' ęq̄lia cub'q̄drati.
æqualia cubo.	18 Numerus & cub'q̄d' ęq̄lia cub'cubi.
10 Numerus & cub' ęq̄lia	19 Nu$^{r'}$ & cub'q̄d'ęq̄lia q̄d'q̄d' æq̄^{o} pri^{a}.
q̄drato ęq̄^{o}prima.	20 Nu$^{r'}$ & cub'cub'ęq̄lia cub'q̄d'ęq̄^{o}pri^{a}.
11 Numerus & cub' ęq̄lia	21 Nu$^{r'}$ & cub'q̄d'ęq̄l'q̄d'q̄d'ęq̄^{o}ſecūd^{a}.
q̄drato ęq̄^{o}ſecunda.	22 Nu$^{r'}$ & cub'cub' ęq̄l'cu'q̄d' ęq̄^{o}ſecūd.
12 Numerus ęq̄lis rebus	23 Nu$^{r'}$ ęq̄lis q̄d' & q̄d'q̄d' & cub'q̄d'.
q̄drato & cubo.	24 Nu$^{r'}$ ęq̄lis cub' & cub'q̄d' & cub'cu'.
13 Numerus & res ęq̄lia	25 Nu$^{r'}$ & q̄d' ęq̄lia q̄d'q̄d' & cub'q̄d'.
quadrato & cubo.	26 Nu$^{r'}$ & cub' ęq̄lia cub'q̄d & cub'cu'.
14 Numerus & res & q̄d'	27 Nu$^{r'}$ & q̄d' & q̄d'q̄d' ęq̄lia cub'q̄d'.
ęqualia cubo.	28 Nu$^{r'}$ & cub' & cub'q̄d' ęq̄lia cu cub'.
15 Numerus & q̄d'ęq̄lia	29 Nu$^{r'}$ & q̄d'q̄d'ęq̄l' q̄d' & cu'q̄d ęq̄^{o}p^{a}
rebus & cub' ęq̄^{o} prima.	30 Nu$^{r'}$ & cu'q̄d'ęq̄l'cu & cu'cu ęq̄^{o}pri^{a}.
16 Numerus & q̄d'ęq̄lia	31 Nu$^{r'}$ & q̄d'q̄d'ęq̄l'q̄d' & cu'q̄d ęq̄^{o}ſec.
rebus & cubo ęq̄^{o} ſecūda.	32 Nu$^{r'}$ & cu'q̄d'ęq̄l'cu' & cu'cu'ęq̄^{o}ſec.

17 Nume-

17 Numerus & cu' ęq̄lia rebus & q̄d' ęq̄° prima.	33 Nu" & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d' & q̄d' q̄d' æq̄° pri° 34 Nu" & cu' cu' ęq̄l' cu' & cu' q̄d' ęq̄° pri°.
18 Numerus & cu' æq̄lia rebus & q̄d' æq̄° ſecūda.	35 Nu" & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d & q̄d' q̄d' ęq̄° ſec. 36 Nu" & cu' cu' æq̄l' cu' & cu' q̄d' æq̄° ſec.
19 Numerus & res & cu' æq̄lia q̄d' æq̄° prima.	37 Nu" & q̄d' & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d q̄d' ęq̄° pri° 38 Nu" & cu' & cu cu' ęq̄l' cu' q̄d æq̄° pri°.
20 Numer' & res & cu' ęq̄les q̄d' æq̄° ſecunda.	39 Nu" & q̄d' & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d' q̄d' ęq̄° ſec. 40 Nu" & cu' & cu cu' ęq̄lia cu' q̄d' ęq̄° ſec.
21 Numerus q̄d' & cu' æq̄lia rebus æq̄° prima.	41 Nu" & q̄d' q̄d' & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d ęq̄° pri° 42 Nu" & cu' q̄d' & cu' cu' ęq̄l' cu' ęq̄° pri°.
22 Numer' & q̄d' & cu' æq̄lia rebus æq̄° ſecūd°.	43 Nu" & q̄d' q̄d' & cu' q̄d ęq̄l' q̄d' ęq̄° ſec. 44 Nu" & cu' q̄d' & cu' cu' æq̄l' cu' æq̄° ſec.

De æquationibus capitulorum ſimplicium. Cap. III.

Æſtimatio rei, eſt quantitas, in qua ueritatē experimur propoſitorum in capitulo & quæſtione. Exemplum eſt, cum quis dixit, feci ex 10 duas partes, & duxi earum ſingulas in ſe, & fuit productorum differentia 60. quia igitur neſcimus quæ quantitas ſit maior aut minor. Ponemus minorē eſſe rem ignotam, quam uocamus poſitionem, erit igitur pars maior reſiduū ad 10, ſcilicet 10 m: 1 poſitione, tunc ſequemur quod eſt propoſitū, & ducemus partes in ſe, & fiet q̄dratū minoris 1 q̄dratū,

1 poſitio	1 q̄dratum.
10 m: 1 poſ^{ne}	1 q̄d^{m} p: 100 m: 20 poſ^{bus}.
1 q̄d^{m} p: 20 poſ^{bus}	1 q̄dratum p: 100.

60 p: 20 poſitionibus æqualia 100.

20 poſitiones æquales 40.

& maioris 1 q̄dratū p: 100 m: 20 poſ^{bus}, adde quod eſt m: alteri parti, fiet 1 q̄d^{m} p: 100 ex una parte, & 1 q̄d^{m} p: 20 poſ^{bus}, horum differentia fuit 60 ex ſuppoſito, addemus igitur 60 minori parti, & tunc fient ęq̄les 1 q̄d^{m} p: 100, & 1 q̄d^{m} p: 20 poſ^{bus}, p: 60, abijciemus 1 q̄d^{m} & 60 ex utraq; parte, remanebūt igitur 20 poſ^{ones} æq̄les 40, qa ſi ab æq̄libus ęq̄lia auferantͤ, quę relinquuntͤ ſunt ęq̄lia, diuidendo igitur 40, per 20 numerum poſitionum, exibit 2, æſtimatio poſitionis, in hoc itaq; 2, ueritatem propoſitę quæſtionis experimur, nam ſi eius quadratū quod eſt 4, ex 64 q̄drato 8 reſidui 2 & 10 abijciatur, relinquetur 60 propoſitus Numerus. Eſt etiam uerum de 2, quod proponitur in capitulo, ſcilicet quod q̄dratum eius quod eſt 4. cum 100, æq̄tur quadrato poſitionis, quod eſt iterū 4 & 20 poſ^{bus}, quę ſunt 40 & 60 ſimul iunctis,

nam

nam utroq; modo colliguntur 104, dicemus igitur merito, propter duo, quod 2 eſt rei æſtimatio, & cum recte operatus fueris, in æſtimatione ſeu æquatione, utraq; experientia ſuccedit.

DEMONSTRATIO.

2 Vt uero rei ueritas apertius deprehendat, atq; cum ea ratio, ſcire enim eſt per demonſtrationem, ut dicunt, intelligere, ſint gratia Exempli, cubi tres æquales 24, & ponatur A C latus unius cubi, & C D alterius, & D B tertij, qa igitur cubi ſunt æquales, inuicem, erunt & lineæ A C,



C D, D B æquales, cum igitur ſecundum numerum, ſecundum quem A C eſt in A B, qui eſt 3, diuiditur 24, & cuborum quantitas fiet ex 19ª quinti uel 17ª ſeptimi elementorum, & 31ª. 11ª eiuſdem, cubus A C æqualis 8, igitur A C latus, erit 2, æſtimatio rei, ex quo colligitur generalis regula.

REGVLA.

3 Deprime propoſitas duas denominationes ad numerum, ſi numerus non adſit, æqualiter deducendo, cunq; altera fuerit denominatio, altera numerus, diuide numerum per numerum denominationis, exiens eſt æſtimatio denominationis, quæ denominatio ſi poſitio eſt, poſitionis habes æſtimationem. ſi alia denominatio, ſume latus ſeu radicē illius numeri pro denomniationis qualitate, ſi q̄dratū, q̄dratum, ſi cubus, latus cubicum, ſi q̄d'q̄d", radicē radicis, atq; ita deinceps, & latus illud ſeu radix, eſt poſitionis uera æſtimatio. Exemplum, cubi 20 æquantur 180 relatis primis, quia igitur nō eſt hic numerus. Infimam denominationem cuborum, pones pro ſimplici numero, ſcilicet 20. & maiorem ſeu altiorem relatorum, per cubos deprimes, & fient 180 q̄drati, diuide igitur 20 numerum, per 180 numerum q̄dratorū, exit $\frac{1}{9}$ æſtimatio q̄drati. Verum nos quęrimus poſitionis æſtimationē, non q̄drati, ſume igitur radicem q̄dratam $\frac{1}{9}$. & eſt $\frac{1}{3}$, pro uera æſtimatione. Aliud Exemplum, 7 q̄drati æquentur 21 cub'q̄d", deprime ad numerum æqualiter, fient 7 æq̄lia 21 q̄d'q̄d", diuide 7 per 21. exit $\frac{1}{3}$, & ℞'℞ $\frac{1}{3}$, quæ eſt latus q̄d'q̄d", eſt rei æſtimatio. Aliud. 2 cubi æquentur 20 q̄d'q̄d", deductis cubis ad numerum, q̄d q̄d" peruenie̅t ad poſ", igitur 20 poſ: æquantur 2, diuide 2 per 20, exit $\frac{1}{10}$, & quia diuiſiſti cum numero poſitionum, erit poſitionis æſtimatio $\frac{1}{10}$. Aliud. 20 æquantur 5 q̄dratis, diuide 20 per 5, exit 4, æſtimatio q̄drati, igitur rei æſtimatio eſt 2.

4 Et ut omnibus etiam capitulis futuris ſatisfaciam, maioris denominationis numero reliquos omnes ac numerum diuides, maiorem intelligo

intelligo altiorem,& cum minore denominatione deprimes, poſtmodũ regulam capituli ſequeris. Sint gratia exempli 4 cubi æquales 12 q̃dratis & 8 poſ^{bus}. minor denominatio eſt poſitio, maioris numerus eſt 4, diuides igitur omnia per 4,& habebis 1 q̃dratum æquale 3 poſ^{bus} p:2.

4 cub.	12 q̃d^{ta} p:8 poſ^{bus}
4	
1 q̃d.	3 poſ^{nes} p:2.

Ex his etiam patet, quod ſimplex poſitio, longe magis patet falſis poſitionibus, Nam & ad q̃drata,& ad cubos,& reliquas extenditur denominationes, Ideoq; æſtimationes habet in radicibus, quarum in falſa poſitione nullus omnino eſt uſus. Quod uero pertinet ad numerum poſitionibus æqualem, adhuc utraq; falſa poſitione generalius eſt, ut in primo Exemplo patuit, nulla enim falſa poſitione licet uenari, quæ nam partes decem q̃drata uariant, quorum differentia ſit 60, ut ibi propoſitum eſt. Cor^m.

De ſubiectis æquationibus generalibus & ſingularibus. Cap. IIII.

Singulares dicuntur æquationes, in quibus nullum capitulum perfecte poteſt abſolui,& tales ſunt numerus integer, uel fractus, latus etiam omne numeri, ſeu quadratum ſeu cubicum uel alterius generis, atq; ut ita dicam, omnis ſimplex quantitas, item conſtantes ex duabus radicibus omnes, quarum altera ſit q̃drata, uel ℞ ℞. & generaliter radix par, unde quę ex duobus conſtant nominibus,& apotome ſeu ut dicunt reciſa tertij ac ſexti generis, non apta ſunt æquationi generali. 1

Omne etiam capitulum, quod ex numero q̃drato, cubo, & poſitionibus conſtat, eas habet generales æquationes, quæ ex capitulo, ad quod deducuntur, deriuatę ſunt, addita uel detracta tertia quadratorum numeri parte, ut ſuo loco oſtendetur. 2

Generales autem æſtimationes, ſunt, in capitulis q̃drati æqualis rebus & numero, ſecundi generis, conſtans ex nominibus duobus, ut ℞ 19 p:3, capituli autem q̃drati & rerum æqualium numero, ſecunda apotome, ut ℞ 19 m:3, capituli autem quadratorum & numeri æqualium rebus, apotome,& conſtans ex duobus nominibus primi generis, ut 3 p:℞ 2,& 3 m:℞ 2. Vbi aũt primũ genus dico, quartũ etiam intelligo, ſic & ubi ſecundum, etiam quintum, tam in apotome quàm ex duobus nominibus conſtantẽ. 3

At unius radicis uniuerſalis æquatio, deriuatiuis conuenit capi- 4

tulis,ſeu cubica ſeu q̃drata,hiſq; quorum principalibus quadratum aut cubus radicis pro æquatione fuerat,uelut ſi q̃drato æquali rebus & numero æſtimatio hęc conueniebat,℞ 19 p:3,capitulo cub' q̃drati æqualis cubis & numero ſub eadem quantitate exiſtentibus, ęquatio erit,℞ v:cubica ℞ 19 p:3.

5 Et ſicut radix quadrata, nulli pręterq; numero iungi poteſt, ut æquationem efficiat generalem,ſic è diuerſo,cubica cubicæ iũcta,efficere poteſt,numero non poteſt. Cum igitur iungitur cubi æqualis rebus & numero,æquationem producit,non integram tamen, at detractæ inuicem,efficiunt æquationem capituli cubi & rerum æqualium numero,uelut ℞ cubica 4 p:℞ cubica 2,eſt æquatio capituli, cubi æqualis rebus & numero,& ℞ cubica 4 m:℞ cubica 2, eſt æquatio capituli cubi & rerum æqualium numero.

6 At capitulum cubi æqualis quadratis & numero,habet æquationem conſtantem ex tribus quantitatibus proportionalibus, quarum duæ extremę ſunt radices cubicæ,media eſt numerus,ut ℞ cubica 16 p:2 p:℞ cubica 4.ſed capitulum cubi & quadratorum æqualium numero, habet ſimilem in omnibus præcedenti æquationem, excepto quòd numerus eſt m: uelut ℞ cubica 16 m: 2 p: ℞ cubica 4.

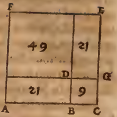
7 Illud etiam intelligendum eſt,radices ſimplices pro generalibus æquationibus haberi, ut tamen etiam ſimplicia ſint capitula, uelut ℞ cubica inſeruit capitulo numeri æqualis cubo,& q̃drata,numeri ęqualis q̃drato,& relata,capitulo relati æqualis numero,& ſicut hæ ſimplices compoſitis capitulis conuenire nequeunt, ſic nec ullum compoſitũ ex pluribus radicibus incommenſurabilibus capitulo ſimplici poteſt conuenire.

Oſtendit æſtimationem capitulorum compoſitorum minorum, quæ ſunt q̃dratorum,numeri,& rerum. Cap. V.

DEMONSTRATIO.

1 Sit quadratum F D & 6 res(gratia exempli)ęquale 91,tunc faciam D B & D G cum fuerint productę eſſe 3, dimidium ſcilicet 6,numeri rerum,&complebo quadratum D G B C, indeq; productis C G & C B quadratum A F E C,prout in quarta ſecundi elementorũ fit,quia igitur D.B ducta in A B ex diffinitione ſecũdi elementorum producit A D. ſuper finem, & ex numero quolibet in rei æſtimationem producitur æſtimatio illarum rerum,uelut ſi res eſt 4,& ſint quinq; res,erunt quinq; res 20,& tantum producitur

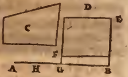
citur ex 4 æſtimatiõe rei in 5 numerum rerũ, ut oſtendimus in capitulo tertio, igitur cum B D ſit 3, & A B æſtimatio rei, erit ſuperficies A D tribus rebus æqualis, ſeu æſtimatio trium rerum, at ſuperficies D E æqualis eſt A D, ex 43ª primi elementorum, igitur & ipſa eſt æſti matio trium aliarum rerum, duæ igitur ſuper ficies, A D & D E, ſunt æquales 6 rebus, qua re ipſę cum quadrato F D ſunt 91, at quadra



tum, C D eſt 9, quia B D eſt 3, igitur A C quadratum eſt 100, quare la tus eius A C eſt 10, cum igitur B C ſit 3, detracta B C ex A C, relinquitũ A B latus D F 7.

Alia Demonstratio.

Sit modo A B numerus rerum quarundam, æqualium C numero 2
& quadrato D, & faciam quadratum B G dimidij A B, quod ſit G E, à quo auferam C numerum, ut E F ſuperficies æqualis ſit numero C, & ponam latus quadratũ, F B ſuperficiei, quod ſit G H, dico lineas B H & H A eſſe utraſq; late ra quadrati D, unde ſequitur duas fore ue ras æſtimationes huius capituli, quarum ag gregatum eſt æquale numero rerum, uideli cet A B, conſtat enim quod rectangulum ex A H in H B, una cum q̃drato H G eſt æquale



quadrato B G, ex 5ª 2ⁱ elementorum. quadratum autem H G æquale fuit F B ſuperficiei, rectangulum igitur ex A H in H B, æquale eſt E F, quare & C numero, quod autem fit ex A B in H B, ex 3ª 2ⁱ elementorũ, æquale eſt quadrato H B & rectangulo A H in H B, igitur quod fit ex numero rerum A B in æſtimationem rei quę eſt H B, æquale eſt nume ro C, & quadrato H B, quod eſt probandum. Et ſimiliter eadem ratio ne rectangulum ex A B in A H, ęquale eſt quadrato A H, & ductui A H in H B, ſed ex A H in H B, ut probatum eſt, fit C numerus, igitur rectan gulum ex A B in A H, ſcilicet ex numero rerum in rerum æſtimationẽ, æquatur quadrato rei & numero propoſito.

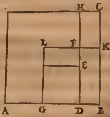
Ex hoc patet, quod illi falluntur qui dicunt (quòd ſi B H, gratia exempli) ſit æſtimatio rei, & G F 3, quod rectangulum ex B H in G F erit 3 G H ſeu triplum G H, hoc enim eſſe non poteſt, ſcilicet quod ſuper ficies contineat lineam aliquam, nec numero, nec alia proportione, cum infinitę lineæ poſsint eſſe in ſuperficie, quantitas enim continua nullum ſuę diuiſionis recipit terminum, ſed ueritas eſt, quod ſi G F cõ tineat tres unitates (gratia exempli) id eſt partes tres lineæ B H, diuiſę

in tot partes,quot unitates ſunt in numero quem dicitur continere,ue luti quod B H ponatur 12,erit G F 3,ubi G F ſit quarta pars B H,& tunc uerum eſt,quod ex B H in G F fit ſuperficies continens 36 ſuperficies quadratas,quarum uniuſcuiuſque tetragonicum latus eſt unitas, id eſt una ex partibus illis,ſecundum quas B H eſt diuiſa in 12, & G F in 3, hoc autem tam in rationalibus, quàm in irrationalibus pulchre oſtendit Plato in Memnone.

Nec admireris,hanc ſecundam demonſtrationem, aliter quàm à Mahumete, explicatã, nam ille immutata figura magis ex re oſtendit,ſed tamen obſcurius,nec niſi unam partem,eamque pluribus,unde nos facilitati & breuitati conſulentes, tum ut utrique æſtimationi una demon ſtratione ſatisfaceremus,hac utimur.

Alia Demonstratio.

3 Sit modo quadratum A C in tertia figura, æquale 6 rebus & 16 numero,& ponatur A D numerus rerum, ſcilicet 6, igitur ſuperficies A H eſt 6 poſitiones,quare D C reſiduũ erit precìſe 16, diuidatur A D per æqualia in G, & fiant quadrata G B & G D, quæ ſint G K & G E. Quia igitur B C ęqualis eſt B A,& B K æqualis B G, erit K C æqualis G A, quare etiam G D & F L,& quia D E & D G ſunt æquales, item D F & B G, erit F E æqualis D B,quare etiam ęqualis F K, duæ igitur lineæ F K & F H, æquales ſunt F L & F E,& anguli A D F recti,igitur F C ſuperficies æqualis eſt L E,ſed F C cum F B fuit 16, igitur L E cum F B fuit 16, addito quadrato G E quod eſt 9,nam G D fuit 3, erit G K



quadratum 25,igitur latus G B 5,addita igitur G A,quæ eſt 3,fiet A B tota 8,rei æſtimatio.

4 Secundum hæc formabimus regulas tres, pro quarum memoria ſubiungemus Carmen hoc,

Querna,da bis. Nuquer, admi.Requan,Minue dami.

Regula 1.

Eſt autem unicuique horum capitulorum commune,ut dimidium numeri rerum in ſe ducatur.Quando igitur quadratum æquatur rebus & numero,quod ſignificatur per Querna ſiue primam tantum in telligas literam ſeu adnumeres ſequentes à prima uocali cõſonantes, ut Querna,quadratũ æquale rebus & numero ſignificet,& Nuquer, Numerum quadrato ac rebus æqualem,& Requan, res quadrato & numero æquales.In hoc Quernę igitur,ſeu capitulo quadrati æqualis

lis rebus & numero, addes quadrato dimidij rerum numerum æquationis, & totius accipe radicem quadratam, cui adde dimidium numeri rerum, & aggregatum eſt rei æſtimatio. Exemplum. ſit 1 q̄dm æquale 10 rebus p: 144, duc 5 in ſe, fit 25 quadratum dimidij rerum, adde 144 fit 169, cuius ℞ eſt 13, huic adde 5 dimidium numeri rerum, fit 18, æſtimatio rei. Rurſus ſit 1 q̄dm æquale $\frac{2}{3}$ rei p: 11, duc $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum in ſe, fit $\frac{1}{9}$, adde ei 11, fit 11 $\frac{1}{9}$, accipe ℞ quæ eſt 3 $\frac{1}{3}$, cui adde $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum, fit 3 $\frac{2}{3}$, rei æſtimatio. Rurſus, ſit 1 q̄dm æquale 10 rebus p: 6, duc 5 in ſe dimidium numeri rerum, fit 25, adde ei 6 fit 31, huius ℞ adde 5, dimidium numeri rerum erit rei æſtimatio, ℞ 31 p: 5. Rurſus ſit 1 q̄dm æquale rebus ℞ 12 p: 22, duc ℞ 3 in ſe fit 3, quadratum dimidij numeri rerum, adde ei 22 fit 25, huius ℞ eſt 5, cui adde ℞ 3, quod eſt dimidium numeri rerum, fiet rei æſtimatio 5 p: ℞ 3, & ſi in hoc caſu numerus fuiſſet 20, eſſet rei æſtimatio ℞ 23 p: ℞ 3, & ſi fuiſſet numerus 9, eſſet æſtimatio rei ℞ 12 p: ℞ 3, quod eſt dicere, ℞ 27, & ſi fuiſſet 1 q̄dratum æq̄le rebus ℞ 12 p: ℞ cub. 10 numeri, duc ut prius ℞ 3, dimidium numeri rerū in ſe, fit 3. adde ei ℞ cub. 10, fit 3 p: ℞ cub. 10, huius accipe radicem, quæ eſt ℞ v: 3 p: ℞ cub. 10, cui adde dimidium numeri rerum & fiet æſtimatio rei ℞ 3 p: ℞ v: 3 p: ℞ cub. 10. & hac uarietate exemplorum hic uſi ſumus, ut in reliquis idem fieri poſſe intelligas, tum etiam eadem in duabus ſequētibus regulis experire, quandoquidem nos duplici exemplo contenti erimus. Manifeſtum eſt igitur, quod hic bis addimus, ſcilicet numerum q̄drato dimidij rerum, & dimidiū rerum radici aggregati, & hoc eſt, quod in carmine diximus, da, bis, quaſi, bis iunge.

Regula II.

Si autem numerus quadrato & rebus æqualis ſit, q̄drato dimidij 5
numeri rerum adijcies numerum æquationis, & totius aggregati accipe radicem, à qua minue dimidium numeri rerum, & reſiduum eſt rei æſtimatio. Exemplum, 144, æquatur 10 rebus & 1 q̄do, duc 5, dimidium 10 numeri rerum, in ſe, fit 25, huic adde 144 fit 169, huius ℞ eſt 13, à qua abijce 5, dimidium numeri rerum, relinquetur rei æſtimatio 8. Rurſus, ſit 6 æqualis 10 rebus p: 1 q̄drato, ducto 5 dimidio rerum in ſe fit 25, adde 6 fit 31, ex huius radice abijce 5, dimidium numeri rerum, fit ℞ 31 m: 5, æquatio.

Ex hoc patet, quod hæc regula à præcedenti ſolum differt, quòd Corm.
minuat dimidium numeri rerum. Ab aggregati radice, ubi illa iungebat, & hoc eſt, quod in carmine diximus, Ad, mi, quaſi, adde primo,

deinde minue, ſcilicet, adde numerum quadrato, & minue dimidium numeri rerum poſtmodum ab aggregati radice.

Corᵐ. Ex quo patet, quòd differentia æſtimationis quadrati, æqualis rebus & numero, & numeri, æqualis rebus & quadrato, eſt numerus rerum ad unguem, ubi in eiſdem rebus & numeris ſtatuantur, uelut æſtimatio q̄drati æqualis 10 rebus p: 144 eſt 18, & æſtimatio 144 æqualis quadrato & 10 rebus eſt 8, & differentia 18 & 8 eſt 10.

REGVLA III.

6 Si uero res æquales ſint quadratis & numero, ducto, ut prius, dimidio numeri rerum in ſe, & ab eo detracto numero æquationis, radicem reſidui minue ex dimidio numeri rerum, aut adde, & tam aggregatum, quàm reſiduum eſt rei æſtimatio. Exemplum. 1 q̄dratum p: 16, æquatur 10 rebus, ducto 5 in ſe fit 25, ut prius, deinde minue 16 ex 25 relinquitur 9, cuius ℞ quę eſt 3, addita uel detracta à 5 dimidio numeri rerum, oſtendit rei æſtimationes, 8 addita, & 2 detracta, ſi igitur 10 res ſumantur quæ ſint 2, erunt 20 & tantum erit q̄dratū 2 cum 16, item ſi ſumantur 10 res quæ ſint 8, erunt 80, & tantum eſt quadratum 8, addito ei 16. Rurſus ſi dicam, 10 res, æquantur 1 q̄dᵗᵒ p: 6, ducto 5 dimidio numeri rerum in ſe, fit 25, detracto autem 6 relinquitur 19, cuius ℞ addita uel detracta ex 5, oſtendit rei æſtimatiōes, maiorem quidem 5 p: ℞ 19, minorem uero 5 m: ℞ 19.

Notᵐ. Quod ſi detractio ipſa numeri, à q̄drato dimidij numeri rerum fieri nequit, quęſtio ipſa eſt falſa, nec eſſe poteſt quod proponitur, ſemper autem pro regula uniuerſali in hoc tractatu toto eſt obſeruandū, quòd cum ea quæ præcipiuntur fieri non poſſunt, nec illud quod proponebatur fuit, nec eſſe potuit. Nunc autem ſubiungemus aliquas quęſtiones, duas ex Mahumete, reliquas noſtras, ex omnibus his, quę nec multiplici poſitione, nec particulari utuntur regula, difficillimas.

QVÆSTIO I.

Quęſt. prima. Eſt numerus, à cuius quadrato ſi abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipſius quadrati, atq; inſuper 4, reſiduum autem in ſe duxeris, fiet productum æquale quadrato illius numeri, & etiam 12. Pones itaq; quadratum numeri incogniti quem quęris, eſſe 1 rem, abijce $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ eius & inſuper 4, fiet $\frac{5}{12}$ rei m: 4, duc in ſe fit $\frac{25}{144}$ q̄dⁱ p: 16 m: 3 $\frac{1}{3}$ rebus, & hoc eſt æquale uni rei, & 12, abijce ſimilia, fiet 1 res æqualis $\frac{25}{144}$ q̄dⁱ p: 4 m: 3 $\frac{1}{3}$ rebus, redde quod eſt minus, alteri parti, pro uniuerſali regula, erūt res 4 $\frac{1}{3}$ æquales $\frac{25}{144}$ q̄drati p: 4, quare per quartam regulam tertij capituli, deuidi numerum rerum & 4 per $\frac{25}{144}$ numerum q̄drati, & fiet res 24 $\frac{24}{25}$ ęquales 23 $\frac{1}{25}$ p: q̄drato, quare per tertiam regulā, du

ces

ces $12\frac{12}{25}$ in ſe, fiet $155\frac{469}{625}$. minue $23\frac{1}{25}$ fiet $132\frac{544}{625}$, huius ℞ eſt $11\frac{13}{25}$, quam adde ad $12\frac{12}{25}$ dimidium numeri rerum, fiet æſtimatio rei quęſita 24, ſcilicet quadrati huius radix, eſt numerus ille qui quæritur, Ex hoc docemur per principalia capitula uitare deriuatiua, nam in poſitione rei pro primo numero, fuiſſet quadratum eius operationis fundamentum, & perueniſſes ad 1 q̄d q̄d^{m} p: $23\frac{1}{25}$ æqualia $24\frac{24}{25}$ q̄d^{to}, quare hæc ſit tibi pro exemplo, nunc ſequamur ſecundam illius.

Qvæstio II.

Duo duces diuiſerunt militibus ſuis aureos 48 ſinguli, Porrò unus ex his habuit milites duos plus altero, & illi qui milites habuit duos minus, contigit ut aureos quatuor plus ſingulis militibus daret, quęritur quot unicuiq; milites fuerint? Pone numerū militum minorem 1 rem, maior erit 1 poſ^{o} p: 2, quia igitur ſumma diſtribuenda æqualis fuit, manifeſtum eſt, quòd quantitates erunt proportione ſimiles, eſt aūt 4 duodecima pars 48, multiplica igitur $\frac{1}{12}$ in 1 poſ^{em} p: 2. fit $\frac{1}{12}$ poſ^{is} p: $\frac{1}{6}$, hoc multiplica per numerum priorum hominum, fit $\frac{1}{12}$ q̄d^{ti} p: $\frac{1}{6}$ poſ^{ti}, duc uero omnia ad 1 q̄d^{m}, fiet 1 q̄d^{m} p: 2 poſ^{tio}, æqualia 24, accipe dimidium numeri rerum & eſt 1, duc in ſe, fit 1, adde ad 24, fit 25, ab huius ℞ minue 1 dimidium numeri rerum, fit 4, numerus hominum minor, & 6 maior, & primis obtigerunt aurei 12 pro ſingulo, alijs 8 pro ſingulo. multiplicatio autem illa, quando reducitur quadrati pars ad integrum fit per exceſſum hominum, ſcilicet 12 per 2. Et cauſa in hoc eſt, quòd proportio differentiæ ſecundæ ad primam, eſt ut aggregati quod diuidi debet ad productum ex numero hominum inuicem, uelut proportio 48 ad 24, productum ex 4 in 6, eſt uelut 4 differentię aureorum ad 2 differentiam hominū. & per hanc docuit modum operandi in quæſtionibus proportionū, ſed magis præcipue quando uolumus numerum integrum, ut in hominum numero, in quibus perabſurdum eſſet intelligere medium hominem, nedum quantitatem aliquam irrationalem uel radicem.

Queſt. ſecūda

Qvæstio III.

Nunc autem proponamus quæſtiones noſtras, quarum prima eſt ſimilis præcedenti. Duæ ſocietates hominū, quarum una continebat 3 homines pluſq; altera, diuiſerunt æquales aureorum numeros, qui tamen erant 93 plus aggregato hominum, in ambabus ſocietatibus exiſtentium, & pro ſingulis hominibus ſocietatis minoris, contigerūt aurei 6 plus, quàm hominibus ſingulis maioris ſocietatis. Pones numerum primæ ſocietatis rem unam, habebit igitur ſecunda ſocietas rem & 3 p: quare ſumma aureorum, quæ eſt 93 p: utraq; ſocietate, eſt

Queſt. tertia

96 p:

96 p: duabus rebus, proportio aũt exceſſus aureorũ 6 qui contingunt ſocietati minori, ad exceſſum hominum, ſcilicet ad 3, eſt ut ſummę aureorũ, ad productum ex numero hominum primę ſocietatis, in numerum hominũ ſecundæ ſocietatis, proportio autem 6 ad 3, dupla eſt, igitur proportio 2 poſ^{um} p:96 ad 1 q̃d^{m} p:3 poſ^{bus} productum ex 1 poſ^{ne} in 1 poſ^{em} p:3, eſt dupla, igitur dimidium 2 poſ^{um} p:96, quod eſt v: poſ^{o} p:48, æquale eſt, 1 q̃d^{to} p:3 poſ^{bus}. abiecta itaq; 1 poſ^{ne} ex utraq; parte, fiet 1 q̃d^{m} p:2 poſ^{bus} æq̃le 48, ducito dimidium 2 in ſe fit 1, nam dimidiũ 2 eſt 1, huic adde 48, fit 49, huius radix eſt 7, à qua minue 1 dimidium numeri poſ^{um}, habebis æſtimationem poſ^{is}, & numerum primæ ſocietatis 6, ideo numerus hominum ſecundę ſocietatis, eſt 3, p: ſcilicet, horum ſi fiat collectio, addanturq; inſuper 93, fiet numerus aureorum 108, primis igitur aurei 18, ſecundis 12, per capita cõtigere. Aliter & facilius expertis in operationibus poſitio fiat ut prius, eritq; ſumma aureorum 2 poſ^{es} p:96. diuide per poſitionẽ & poſitionem p:3, habebis $\frac{\text{2 poſ.p:96}}{\text{1 poſ.}}$ æqualem 6 p: $\frac{\text{2 poſ.p:96}}{\text{1 poſ.p:3}}$, igitur detracto $\frac{\text{2 poſ.p:96}}{\text{1 poſ.p:3}}$ ex $\frac{\text{2 poſ.p:96}}{\text{1 poſ.}}$, relinquitur 6, at ex tali detractione fit $\frac{\text{6 poſ.p:288}}{\text{1 quad.p:3 poſ.}}$ igitur hoc eſt æq̃le 6, diuiſis igitur 6 poſ^{bus} p:288. per 6, exibit 1 q̃d^{m} p:3 poſ^{bus}, nam ſi diuiſo 10 per 2 exit 5, diuiſo 10 per 5 exibit 2, igitur diuiſis 6 poſ. p:288 per 6, exit 1 poſitio p:48, & hæc æqualia ſunt 1 quadrato p:3 poſitionibus, quare ut prius, res ualet 6.

1 poſ.
1 poſ. p:3.
93
2 poſ. p:96
6 — 2 — 3
1 poſ. p:48
1 q̃d. p:3 poſ.
1 q̃d. p:2 poſ. æq̃. 48

QVÆSTIO IIII.

Quęſt. quarta. Eſt numerus, cui ſi addantur duæ radices, aggregato uero iterum addantur duæ radices ipſius aggregati, fiet totum 10, tunc dices, 10 ęqualis eſt ſecundo numero & duabus eius radicibus, ponemus igitẽ numerum aggregatũ ſecundum, 1 q̃d^{m}, & hic, cũ duabus radicibus, ęqualis eſt 10, igitẽ rei ęſtimatio per ſecũdam regulã, eſt ℞ 11 m: 1. igitur abijce duplum huius ex 10, relinquetur aggregatũ 12 m: ℞ 44, hoc autem ex ſuppoſito conſtat ex q̃drato & duabus radicibus, igitur 1 q̃d^{m} p:2 poſ^{bus} æquatur 12 m: ℞ 44, ducito 1, dimidium numeri rerum in ſe, fit 1, adde ei numerum fit 13 m: ℞ 44, accipe radicem, & ex ea minue 1 dimidium numeri rerum, habebis ℞ v: 13 m: ℞ 44 m: 1, hanc igitur duplicatam, ſi detraxeris ex aggregato, relinquetur numerus primus propoſitus, 14 m: ℞ 44 m: ℞ v: 52 m: ℞ 704, & ita poſſet

poſſes regrediendo quantumlibet procedere, ab ultimo, ſemper inchoando termino. Prolixior autem ero hic in exemplis, quoniam hæc capitula mercaturæ maxime conueniunt, tum quia tyrones in his introducuntur, uelut & paruos pueros ſolent magiſtri diligentius minuta quæcꝫ docere, tum uero quòd eadem in reliquis poſtmodum fabricare poſſumus.

14 m: ℞ 44 m: ℞ v: 52 m: ℞ 704
duc radices eius ℞ v: 52 m: ℞ 704 m: 2

aggregatum 12 m: ℞ 44
duc radices huius ℞ 44 m: 2

aggregatum 10

Qvæstio. v.

Inuenias numerum, à quo detracta ℞ cubica, & reſiduo addita ſua quadrata radice, perficiatur primus numerus. Pones itaqꝫ reſiduum illud à quo detraxiſti radicem cubicam eſſe 1 q̃dratum, addemus itaqꝫ ei radicem quadratam & fiet 1 q̃dratum p: 1 poſ^{ne}, & hoc æquale eſt 1 cubo, nam ex eo quod addito ad 1 q̃dratum tantum fit quantum erat prius, igitur quod additur æquale eſt ei quod minuitur, minuitur autem ℞ cubica totius quantitatis, igitur poſ^{o} eſt radix cubica aggregati, quare aggregatum eſt cubus, & hic ęqualis eſt 1 q̃d^{to} p: 1 co: deprime per 1 co: habebis 1 q̃d^{m} ęquale 1 poſ. p: 1, poſitio igitur eſt ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, at numerus primus fuit cubus poſitionis, igitur primus numerus eſt ℞ 5 p: 2. Quæſt. quinta.

cubus ℞ 5 p: 2
q̃d^{m} 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$
poſ. ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$

Qvæstio vi.

Quidam ter iuit ad nundinas, in primo itinere retulit duplum eius quod attulerat, in ſecundo cum detuliſſet tale duplum ſecum, rediit cum eiſdem pecunijs, & radice earum & duobus aureis plus, hoc totum autem ſeruauit, rediitqꝫ cum eo ad nundinas tertio, & ſuperlucratus eſt tantum, quantum eſſet illud quod produceretur ex pecunijs quas ſecũ attulerat in ſe ductis, ac etiã quatuor aureos plus, reuerſus eſt autem cum 310 aureis, quęro igitur, quantum attulit ſecum pecuniarum, in primo itinere? Dices retulit aureos 310 & hoc fuit æquale pecunijs ſecundi itineris & quadrato earum & 4 p: igitur pecuniæ quas attulit ſecum in 3° itinere, q̃dratum earum æquantur 306 aureis, abiecto cõmuniter numero 4, ponemus igitur pecunias quas ſecum attulit 1 poſ^{em}, & habebimus 1 q̃d^{m} p: 1 poſ^{ni} æquale 306, igitur ex ſecunda regula, res ualet ℞ 306 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, quod eſt dicere 17 & tot aureos detulit ſecum tertio itinere, & tot habuerat in ſecundo itinere quos ſeruauerat, dictum eſt autem, quòd in ſecundo itinere lucratus eſt radicem eorum quos attulerat & 2 p: & retulit 17, igitur ſi lucratus fuiſſet radicem tantum, retuliſſet 15, igitur poſitis pecunijs quas Quæſt. ſexta.

ſecum attulit 1 q̃dratum, habebimus 1 q̃dm p: 1 poſ: æqualia 15, igitur ex ſecunda regula, res ualet ℞ 15 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & hoc eſt quod lucratus eſt in ſecundo itinere, & cum hoc etiam lucratus eſt aureos 2, lucrum igitur totum fuit eius itineris ℞ 15 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, ipſe autem retulit domum aureos 17, igitur iuit cum aureis 15 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 15 $\frac{1}{4}$, hæ pecuniæ ſunt quas in primo itinere ſeruauerat, & fuerant duplũ eius quod attulerat, primo igitur itinere attulit ad nundinas dimidium 15 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 15 $\frac{1}{4}$ aureorum, quod eſt 7 $\frac{3}{4}$ m: ℞ 3 $\frac{13}{16}$ aureorum.

QVÆSTIO VII.

Queſt. ſeptima. Quidam rex proconſuli ducenti exercitum aureos miſit 128000, ut 7000 equitum & 7000 peditum cõduceret, ea erat ſtipendij ratio, ut pro ſingulis 100 aureis, ſemper 18 pedites pluſq́ equites conduceret, uenit tribunus quidam militum ad proconſulem cum 1700 peditibus & 200 equitibus, quęritur ſtipendij ratio. Hæc tertiæ quæſtioni affinis eſt, conſidera quòd 128000, ſunt 1280 centena, quia dictũ eſt quod pro ſingulis cẽtum aureis differentia numeri peditum à numero equitum ſit 18, diuide igitur 1280 in duas partes, quarum una ducta per unam quantitatẽ producat 7000, & ſimiliter reliqua ducta p eandem quantitatẽ p: 18, producat etiam 7000, igitur poſita quantitate equitum pro re, erit quantitas peditũ res & 18 p: diuiſis igitur 7000 per harum ſingulas, prouenient aggregata 1280, nam ſi ex partibus 1280 ductis in rẽ, & rem p: 18, fiunt 7000 & 7000, igitur diuiſis 7000 per rem, & 7000 per rem p: 18, exeuntia iuncta facient 1280, ex talium igitur diuiſione aggregantur $\frac{\text{poſ. } 14000 \text{ p: } 126000}{1 \text{ quad. p: } 18 \text{ poſ.}}$ & hoc cum ſit æquale 1280, igitur diuiſo numeratore per 1280, exit 1 q̃dm p: 18 poſ. facta igitur tali diuiſiõe, prodit 10 $\frac{15}{16}$ poſ^{tio} p: 98 $\frac{7}{16}$, hocq́ eſt æquale 1 q̃drato p: 18 poſ^{tio}, igitur 1 q̃d. p: 7 $\frac{1}{16}$ poſ^{tio} æquatur 98 $\frac{7}{16}$, igitur res ualet ℞ 110 $\frac{929}{1024}$ m: 3 $\frac{17}{32}$, ſed ℞ 110 $\frac{929}{1024}$ eſt 10 $\frac{17}{32}$, igitur detractis 3 $\frac{17}{32}$, relinquetur rei æſtimatio 7, & tot equites 100 aureis cõducet, & pedites 25, igitur pro 1700 peditibus ſtipendium debuit eſſe 6800 aurei, & pro 200 equitibus aurei 2857 $\frac{1}{7}$.

$$\frac{7000}{1 \text{ pos.}} \quad \frac{7000}{1 \text{ poſ. p: } 18}$$

$$\frac{\text{poſ. } 14000 \text{ p: } 126000}{1 \text{ quad. p: } 18 \text{ poſ.}}$$

$$\frac{\text{poſ. } 14000 \text{ p: } 126000}{1280}$$

$$\frac{\text{poſ. } 10\frac{15}{16} \text{ p: } 98\frac{7}{16}}{1 \text{ quad. p: } 18 \text{ poſ.}}$$

1 q̃d. p: 7 $\frac{1}{16}$ poſition: æqualia 98 $\frac{7}{10}$

QVÆSTIO VIII.

Queſt. octaua. Fac de 20, tres quantitates proportionales, quarum ſecunda ęqualis ſit radicibus primæ & tertiæ ſimul iunctis, pone ſecundam eſſe poſitionem, reliquum erit 20 m: 1 poſ^{ne}, quia igitur ex hoc facere oportet partes

partes duas, inter quas poſitio cadat proportionalis, erit ex 16^{a} 6^{i} elementorũ, ut ex una in aliam fiat q̃dratũ poſ^{ni}, quare per 5^{am} 2^{i} elementorum, ſeu ex regulis ſexti libri, ducemus dimidium 20 m: 1 poſ^{ne} in ſe, & fiet 100 m: 10 poſ^{bus} p: $\frac{1}{4}$ q̃d^{ti}, à quo auferemus quadratum poſitionis, & fiet 100 m: 10 poſ^{bus} m: $\frac{3}{4}$ q̃d^{ti}, huius radicem adde, & minue à medietate 20 p: 1 poſ^{ne}, & habebis partes quas uides, ut igitur iungas radices uniuerſales harũ, fac ut in 3° libro te docui, iunge primo quantitates & & habebis 20 m: 1 poſ^{ne}, deinde multiplica quantitates ipſas inuicẽ, & iunge cum aggregato quantitatum earum duplum, & fit totum 20 p: 1 poſ^{ne}, huius radix æquatur 1 poſ^{ni}, igitur 1 q̃d^{m} æquatur 20 p: 1 poſ^{ne}, quare per primam regulam ducemus $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum in ſe, & fit $\frac{1}{4}$, adde ad 20, fit 20 $\frac{1}{4}$, accipe radicem quæ eſt 4 $\frac{1}{2}$, & ei adde $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum fit 5, rei æſtimatio, quantitas ſcilicet media, quare faciemus ex reſiduo ad 20, duas partes inter quas cadat 5, & erunt alia poſitione inſtaurata, uel per regulas ſexti libri, 7 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 31 $\frac{1}{4}$ & 7 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 31 $\frac{1}{4}$, harum radices ſimul iunctæ ſunt 5.

10 m: $\frac{1}{2}$ poſ. p: ℞ v: 100 m: 10 poſ. m: $\frac{3}{4}$ q̃d.
10 m: $\frac{1}{2}$ poſ. m: ℞ v: 100 m: 10 poſ. m: $\frac{3}{4}$ q̃d.

20 m: 1 poſ. aggregatum quan.
100 m: 10 poſ. p: $\frac{1}{4}$ quad. m: 100 p: 10 poſ.
p: $\frac{3}{4}$ quad. productum quan.
æquiualens 1 quad.
producti radix 1 poſ.
duplum radicis 2 poſ.
aggregatum ex quantitatibus & producto 20 p: 1 poſ. cuius radix eſt æqualis poſitioni.

Quæstio. ix.

Fac de 10 duas partes, quarum maior, detractis duabus ſuis radicibus, æqualis ſit minori, additis duabus ſuis radicibus, conſtat igitur quòd differentia maioris & minoris eſt, duæ radices maioris, & duæ minoris, ponatur igitur differentia hæc radix 4 poſ^{num}, & ponatur pars una 5 p: ℞ 1 poſ^{ne}, & alia 5 m: ℞ 1 poſ^{ne}, & ſumatur aggregatum, radicum harum partium, & eſt ex libro quarto, ℞ uniuerſaliſsima 10 p: ℞ v: 100 m: 4 poſ^{bus}, & hoc æquatur duplicatum ℞ 4 poſ^{num}, quare dimidium dimidio ſcilicet, ℞ 1 poſ^{nis}, huic ℞ ultimi, quare quadratũ quadrato, ſcilicet 1 poſ° æquabitur 10 p: ℞ v: 100 m: 4 poſ^{bus} igitur 1 poſ. m: 10 æquatur ℞ v: 100 m: 4 poſ^{bus}, quare q̃drata quadratis, quæ ſunt, 1 q̃dratum p: 100 m: 20 poſ^{bus}, & 100 m: 4 poſ. igitur 1 q̃dratum eſt æquale 16 poſ^{bus}, igitur poſ° æqualis 16, & nos uoluimus differentiã partium eſſe ℞ 4 poſ^{num}, igitur differentia partium Quæſt. nona.

 fuit

fuit ℞: 64, quæ eſt 8, & ſic effugiſti q̄d'q̄d^{ti}, ponendo ℞ poſitionum.

QVÆSTIO X.

Queſt. decima

Fuerunt homines in tribus ſocietatibus, & numeri illorum proportionales, ductoq́ numero ſecundæ ſocietatis, in numerum tertiæ, conſurgit aggregatum omnium, cum cubo numeri primæ. Debes in hoc conſiderare, quòd perabſurdum eſt, ut tales numeri ſint irrationales, aut fracti, nam non conuenit ponere hominis partem, uide igitur in qua proportione quadratū dimidij producti ex ſecunda in tertiam ſuperat aggregatum omnium in numero aliquo q̄drato, & inuenies quòd in dupla, capiendo, 1, 2, 4. productum ex dimidio 8, qui fit ex 2 in 4, & eſt 4 in ſe, excedit 7 aggregatum in 9 numero q̄drato, & hoc uenaberis ex alia poſitione ſimplici. Pones igitur totidem res pro his numeris, ſcilicet 1 poſ^{o}, 2 poſ^{es}, 4 poſ^{es}, harum aggregatū eſt 7 poſ^{es}, adde his cubum 1 poſ^{is}, & fiet 1 cubus p: 7 poſ^{b9}, & hoc æquatur 8 q̄dratis, producto ſecundæ in tertiam, deprime partes per poſ^{es}, fit 1 q̄d^{m} p: 7 æq̄le 8 poſ^{b9}, quare per tertiam regulam, duc 4 dimidiū numeri poſ^{um} in ſe, fit 16, abijce 7 numerum, relinquitur 9, huius ℞ addita uel detracta à 4 dimidio numeri rerum, oſtendit 7, & 1 æſtimationes rei. ſed quia 1 non eſt numerus ſocietatis, ideo dicemus quòd res fuit 7, & hic eſt numerus hominum primæ ſocietatis, ſecūda igitur habebit homines quatuordecim, tertia 28; conſtat autem quòd cubus, 7 cum aggregato numerorum eſt 392, & tantum producitur ex 14 ſecundo numero in 28 tertium.

1 poſ.	cubus p^{e}.	1 cub.
2 poſ.	aggreg.	7 poſ.
4 poſ.	ꝓduc. 3^{e} in 2^{am}	8 q̄d.

De modis inueniendi capitula noua. Cap. VI.

1 CVm uero diligenter conſideraſſem in his, uiſum eſt mihi, ut etiam ultra tranſgredi liceret, itaq́ exemplo deriuatiuorum, quæ iam inuenta fuerant, q̄d'q̄drati & q̄d^{ti} æqualium numero, tum etiam cub'q̄drati & cubi æqualium numero, ac reliquorum quatuor, capitulum conſtituerem q̄d'q̄d'q̄d^{ti}, & q̄d'q̄d^{ti} & numeri, inuicem æqualium, indeq́ æſtimatio rei ℞'℞ eſt, æſtimationis principalium eis correſpondentium, uelut ſi 1 q̄dratum p: 1 poſ^{ne} eſt æqualis 12, & æſtimatio rei eſt 3, ſi 1 q̄d'q̄d'q̄d^{um} p: 1 q̄d'q̄d^{to} æquantur 12, æſtimatio rei erit ℞'℞ 3, indeq́ ad excogitanda reliqua deriuatiua animum appulimus.

2 Mox uero ad alia me tranſtuli, uiſumq́ oportunum, ut æquationum naturam ſpectarē, cumq́ & primi coniuncti (ſic enim binomiū)

& apo-

& apotomæ primæ (ſic enim reciſum uocamus) originem intuerer, uiſum eſt, ut in his duæ eſſent diuerſorum generum quantitates, numerus, & irrationalis pars, ſeu radix, porrò cum ad q̃dratum deducitur, numerus quidem fit ex quadratis partium in ſe, radix ex ductu unius partis in alteram bis, cubus uero conſtituitur in parte irrationali, ex triplo quadrati numeri, cum quadrato radicis in radicem. Igitur proportio partis irrationalis in cubo, ad partem irrationalem in q̃drato, eſt uelut tripli quadrati partis, quæ eſt numerus, cum quadrato partis quæ eſt radix, ad duplum numeri. at proportio tripli q̃drati numeri, ad duplum numeri, eſt ipſe numerus cum dimidio. proportio etiam q̃drati radicis, ad duplum numeri, eſt quæ prouenit diuiſo tali q̃drato per idem duplum, igitur ipſa proportio, eſt numerus ipſe cum dimidio ſui, & tali prouentu, quare aſſumptis totidem q̃dratis, erunt partes irrationales æquales, quare tot q̃drata æquabuntur cubo & numero, uelut in hoc caſu, diuido 3 quadratū radicis, per 4, exit $\frac{3}{4}$, cui addo 3, q eſt ęqualis numero & dimidio, fit $3\frac{3}{4}$, dico igitur quod in hac ęſtimatiõe $3\frac{3}{4}$ q̃drati æquabuntur cubo & alicui numero, & eſt numerus ipſe $\frac{1}{4}$.

res 2 p: ℞ 3
q̃d. 7 p: ℞ 48
cu. 26 p: ℞ 675

Demum uolens diligentius rem perſcrutari, poſui 10 q̃drata æqualia cubo, & alicui numero, & poſui partem primam binomij (ſic enim uſus gratia appellabo coniunctum) eſſe, gratia exempli, 3, & cõſtitui partem ſecundam 1 poſ^{em}, & hæc eſt radix. quadratum igitur, eſt 9 p: 1 q̃drato, & hoc totum eſt numerus & 6 poſ^{es}, & hoc eſt radix, at in cubo ut dictum eſt fit pars irrationalis ex triplo q̃drati 3, & eſt 27, & q̃drato 1 poſ^{is} q̃d eſt 1 q̃dratum, in partem quæ eſt irrationalis, id eſt in 1 poſ^{em}, igitur 27 poſ^{es} p: 1 cubo, ęquãtur 10 q̃dratis, in parte irrationali, id eſt decuplo 6 poſ^{um}, quod eſt 60 poſ^{es}, igiť dicemus, quòd cubus æquatur 33 poſ^{bus}, igitur deprimendo per poſ^{es}, q̃dratū æquatur 33, igitur res eſt ℞ 33.

3 p: 1 poſ.
9 p: 1 q̃d. p: 6 poſ.
27 poſ. p: 1 cu.
60 poſ.
1 cu. æq̃lis 33 poſ.

Regvla.

Ex his tandem hæc formatur regula breuiſsima. Adde primo numero dimidium ſui, & totum abijce ex numero q̃dratorum, reſiduū duces in duplum prioris numeri, & producti ℞ eſt ſecunda pars coniuncti. Exemplum, eſt cubus qui cum numero ęqualis eſt 12 q̃dratis, & prima binomij pars eſt 5, adde dimidium 5 ad 5, fit $7\frac{1}{2}$, abijce ex 12, fit $4\frac{1}{2}$, duc $4\frac{1}{2}$ in 10 duplum 5 prioris numeri, fit 45, cuius ℞ eſt ſecunda pars coniuncti, igitur 12 q̃drata & 5 p: ℞ 45, ęqualia ſunt cu

bo & 40. Eadem ratione inueni, quod numerus æquationis, ſcilicet 40, producti ex differentia primi numeri, & numeri quadratorum, in q̄dratum primi numeri, & producti tripli primi numeri, & numeri quadratorum in quadratum radicis, eſt differentia.

Poſt hæc deuolui conſilium ad explorandum qualitatem capitulorum cub' q̄drati, rerum & numeri, uidiq́ꝫ, quòd ſi dixero, cubus & 3 q̄drata, æqualia ſunt 14 rebus, & 20 numero, & ponatur quantitas quædã intellecta, æſtimatio rei, cuius prima pars ſit numerus, ſecunda uero quantitas, alia pars irrationalis. Et ſit gratia exempli, hic 1 p: ℞ 5, cõſtat autem quòd coniungendo partes irrationales cubi & q̄drati, quod illæ fiunt ex duplo numeri quadratorum, in primam numeri partem, ſeu ex numero quadratorum, in duplum numeri, itemq́ꝫ ex triplo q̄drati numeri, & q̄drato irrationalis partis, hoc eſt autem æquale, in capitulo cub' q̄drati, & numeri, etiam numerum rerum conuenit, igitur ut in utroq; pars rationalis talis ſit, ut ſi iungantur, duplum numeri q̄dratorum, & etiam triplum ſui quadrati, cum quadrato alterius partis, conſtituat numerum rerum. Et ſi pars rationalis uel numerus eſſet minus, oporteret ut eſſet differentia dupli numeri q̄drati, & tripli quadrati partis, quę eſt ℞ cum quadrato partis quæ eſt numerus, ipſe numerus rerum. Exemplum, ſi 1 cubus p: 6 q̄dratis p: numero, æquentur 30 rebus, & pars una apotomæ, ſit m: 2, tunc ducemus 6 numerum q̄dratorum, in 4 duplum 2, & fiet 24, huic addemus 30 numerum rerum, & fiet 54, & hoc debet æquari triplo quadrati, quod eſt 12, & quadrato alterius partis, igitur abiecto 12 ex 54 relinquitur 42, & ℞ 42 eſt pars prima apotomæ, quare res ualet ℞ 42 m: 2.

5 p: ℞ 45
5 — 12 — 15
7 3
25 45
175 — 135
40

res 1 p: ℞ 5
q̄d. 6 p: ℞ 20
cub. 16 p: ℞ 320

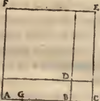
3 Eſt & modus alius, qui ſimilitudinis dicitur, atq; hic quadruplex. A natura æquationis, uelut cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, extrahitur ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Ab augmentis æquationum, ſicq́ꝫ capitulo non uniuerſalia inuenimus q̄d' q̄drati, rerum, ac numeri. A conuerſione æquationum in naturam ei æquiualentẽ, ut exponemus infra. A modo pro ȩdendi ad æquatiões per cuborum uel quadratorum generationem, aut per proportionem ut dupli uel dimidij, aut per additionem uel diminutionem, tres enim ſunt modi uariandi in uniuerſum.

4 Eſt etiam tranſmutationis uia, qua ante demonſtrationem uniuer
ſalia

ſalia capitula multa inueni, atq; inter reliqua, cubi æqualis q̃dratis & numero, & cubi cum q̃dratis, æqualis numero, uelut cũ conamur hanc ſoluere quæſtionem, duos inuenias numeros, quorum aggregatum æquale ſit alterius q̃drato, & ex uno in alterum ducto, producatur 8, una enim uia peruenies ad 1 cubum æqualem 1 q̃drato p: 8, alia, ad 1 cubum p: 8 rebus, æqualem 64, hac igitur inuenta æſtimatione, ſi diui ſeris 8 per eam, prodibit reliqua ęquatio, ex qua in capituli illius cogi tationem perueni. Quæſtiones igitur alio ingenio cognitas ad igno tas transfer poſitiones, nec capitulorũ inuentio finem eſt habitura, nõ tamen extra hæc, ex una quæſtione, generalia poteris aſſequi.

Cum autem intellexiſſem capitulum, quod Nicolaus Tartalea mi hi tradiderat, ab eo fuiſſe demonſtratione inuentum Geometrica, co gitaui eam uiam eſſe regiã, ad omnia capitula uenanda. Itaq; ad eam tria ſuppoſita maxime utilia pręmittere inſtitui, quorum dilucida de claratione, reliqua, quę & ipſa demonſtrabuntur, facile erit intellige re, eſt autem horum hoc primum. 5

Si quantitas in duas partes diuidatur, cubus totius æqualis eſt, cubis ambarum partium, triploq; productorum, uniuſcuiuſq; earũ, uiciſsim in alterius q̃dratũ. Quamuis hoc & reliqua duo quæ ſequun tur in 7° noſtro ſuper Euclidem libro oſtenſa ſint, ne tamen huic ope ri quicq; deeſſet, placuit hic denuo demonſtrare. Sit igitur A C, diuiſa in puncto B, & ſit cubus totius A E, ſint etiã in baſi eius ſuperficies diſtinctæ, D A, D C, D F, D E. manifeſtum eſt autem ex 4ª 2ⁱ elemento rum, C D eſſe quadratum B C, & D F quadra tum A B, & duo rectangula A D & D E, fieri ex A B in B C, ſingula, cubus autem totus con ſtat ex A C linea, in q̃dratum A E, quare ex A C, in ſuperficies D A, D C, D E, D F, compo nentes A E, quare cum A C conſtet ex A B & B C, conſtabit cubus A E, ex octo corporibus, quorum quatuor con ſtant ex A B linea in ſuperficies D A, D C, D E, D F, reliqua quatuor, ex B C linea, in eaſdem quatuor ſuperficies. At ex A B in F D, fit cubus A B, & ex B C in C D, cubus B C, conſtat igitur cubus A E, ex cubis A B & B C, & ex eo quod fit ex A B in D A, D C, D E, & eo quod fit ex C B in D A, D F & D E, at quod fit ex A B in C D, æquale eſt ei q̃d fit ex B C in D A, & quod fit ex B C in D F, ęquale ei, quod fit ex A B in A D, eo quòd altitudines & baſes eædem ſunt, parallelepipeda etiam ex A B in A D, uel D E æqualia ſunt inuicem, ſimiliter ex B C in A D, uel D E, inuicem 6



æqualia,eo quòd D A & D E ſunt æquales ſuperficies,ex 43ª primi elementorum,igitur cubus A C conſtat ex cubis A B & B C, & triplo A B in quadratũ B C,& triplo B C in quadratũ A B, quod erat probandũ.

7 Ex hoc patet ſecundum, ſcilicet, quòd cubus A B,cum triplo A B in quadratum B C,ſuperat cubum B C cum triplo B C in quadratũ A B, in cubo differentiæ A B & B C,ſit igitur A G æqualis B C, & erit differentia A B & B C,linea G B,conſtat autem ex precedente cubum A B, æqualem eſſe cubis A G & G B & triplo A G in quadratum G B, & triplo G B in quadratum A G,quare cubus A B cum triplo A B in quadratum B C,æqualis eſt cubis A G & G B,& triplo A B in quadratum G B, & triplo G B in quadratum A G, & triplo A B, in quadratum B C, uerũ cubus A G æqualis eſt cubo B C, & triplum B G in quadratum A G, æquale eſt triplo B G in quadratum B C , & triplum A G in quadratum G B , æquale eſt triplo B C in quadratum B G , eo quòd B C æqualis eſt A G,cubus igitur A B, & triplum A B in quadratum B C , æqualia ſunt cubo B C,& B G , & triplo B G in quadratum B C, & triplo B C in quadratum B G,& triplo A B in quadratum B C , at ex B G in quadratũ B C, fit quantum ex B C in rectangulum ex B G in B C ter , igitur ex B G in quadratum B C,æquale ei quod fit ex B C in rectangulũ ex B C in B G ter,eadem ratiõe, quod ex A B in B C quadratum ter , æquale ei quod ex B C in rectangulum ex A B in B C ter , cubus igitur A B , & triplum A B in quadratum B C æqualis eſt cubis B G & B C,& triplo B C in rectangulum B C in A B, & triplo B C in rectangulum ex B C in B G,& triplo B C in quadratum B G, at ex 4ª 2ª elementorum , rectangulum ex B C in B A , & ex B C in B G,cum quadrato B G æquantur quadrato A B, igitur cubus B G cum cubo B C,& triplo B C in quadratum A B æqualia ſunt cubo A B , & triplo A B in quadratum B C, quare cubus A B, cum triplo A B in quadratum B C,excedunt cubum B C,cum triplo B C in quadratum A B,in cubo differentiæ B G.

Corm. primũ. Ex hoc patet,quòd ſi B C ponatur m: quòd cubus A B conſtabit ex cubo A C & triplo A C in quadratum B C , addito per m: cubo B C, & triplo B C in quadratum A C , nam ſi B C fuiſſet p: differentia cubi A C cum triplo A C in quadratum B C , à cubo B C & triplo B C in quadratum A C,fuiſſet cubus A B,ex demonſtratis. Sed poſita B C m: tantum eſt quod aggregatur , quanta eſt differentia poſita B C p: igitur cubus A B,eſt aggregatum cubi A C & tripli A C, in quadratũ B C,& tripli B C in quadratum A C m:& cubi B C m: Et eodem modo,ſi A B poneretur m: cubus B C conſtaret ex cubo A C , & triplo A C in quadratũ A B,& triplo A B,in quadratum A C per m:& cubo A B per m:

Eodem

Eodem modo, ſi A B ponatur m: cubus A B componetur ex cubo Corm.
B C, & triplo B C in quadratum A C, & cubo A C per m: & triplo A C ſecūd.
in quadratum B C per m: nam ut dictum eſt, cubus A B, eſt differen-
tia talium partium per p: ex primo corrolario, igitur detracto maio-
re ex minore, fiet tantundem m: ſed cubus A B m: eſt æqualis cubo A B
p: in numero, ut eñ 27 p: eſt cubus 3 p: ita 27 m: eſt cubus 3 m: igitur
cubus A B m: eſt æqualis cubo B C & triplo B C in quadratum A C,
& cubo A C m: & triplo A C in quadratum B C m:

Ex primo autem ſuppoſito, oſtenditur etiam hoc tertium, quod 8
eſt, proportionem aggregati ex cubis A B & B C ad triplum produ-
ctorum A B in quadratum B C, & B C in quadratum A B eſſe, ut trium
linearum in proportione continua, A B & B C exiſtentium aggregati
primæ & tertiæ, detracta ſecunda, ad triplum ſecundæ. conſtat eñ ex
32^{a} 11^{i} elementorum, quòd proportio cubi A B ad corpus ex A C in
quadratum A B, eſt ut quadrati A B ad A D ſuperficiem, quare ex p^{a}. 6^{i}.
elementorum, ut A B ad B C, eadem ratione parallelepipedi ex B C in
quadratum A B ad parallelepipedum ex A B in quadratum B C, pro-
portio, ut A B ad B C, atq; rurſus parallelepipedi, ex A B in quadratum
B C ad cubum B C, ut A B ad B C. Quatuor igitur corpora, ſcilicet cu-
bus A B, parallelepipedum, ex B C in quadratum A B, parallelepipedū
ex A B in quadratum B C, & cubus B C ſunt in continua proportione li-
nearum A B & B C. Statuamur itaq; hæc corpora breuitatis cauſa in
quatuor literis H, K, L, M, ita ut H ſit cubus A B,
& K parallelepipedum ex B C in quadratum A B &
L parallelepipedū ex A B in quadratum B C, & M ſit

H, K, L, M.

cubus B C, igitur cum ratio M ad L ſit ea quæ L ad K, ut probatum eſt,
item K ad L, ut H ad K, erit ex 24^{a} 5^{i} elementorum, K M ad L, ut H L ad
K, quare ex 12^{a} eiuſdem, H K L M, ad K L, ut H L, ad K, quare ex 19^{a}
eiuſdem, H M ad K L, ut H L detracto K, ad K, quare ex 22^{a} eiuſdem,
H M ad triplum K L, ut H L dempto K ad triplum K, at cum H K L, ſint
in proportione A B ad B C, ut probatū eſt, erit ex 11^{a} eiuſdē 5^{i} elemen
torum, cuborum A B & B C, ſimul iunctorū, ad triplum A B in quadra-
tum B C, & B C in quadratum A B, uelut primæ & tertię trium linearū
proportionalium, in proportione A B & B C, detracta media ipſarum,
ad triplum ipſius mediæ.

Ex hoc patet, quòd proportio tripli B C in quadratum A B, ad tri- Corm.
plum A B in quadratum B C, eſt ut A B ad B C, ex 12^{a} 5^{i} el. tertiū.

Atq; etiam, quòd proportio cuborum A B & B C, cum duplo B C Corm.
in quadratum A B, & A B in quadratum B C, ad reſiduum totius cubi quartū

A C,eſt ut trium ſuperficierum D C,D A,D F,ad D E ſuperficiem, ſeu ut trium quantitatum proportionalium in proportiõe A B ad B C,ad mediam ipſarum,ac multa alia quæ breuitatis cauſa omitto.

De capitulorum tranſmutatione. Cap. VII.

1 CVm fuerit numerus & denominatio media, extremæ æqualis, conuertetur capitulum in duas denominationes eaſdem,& ſub eadem magnitudine numero æquales, uelut ſi dicam,quadratum æquatur 6 radicibus & 16, dicemus igitur etiam,quadratum & 6 radices,æquantur 16, manetq́ conuerſa ratio,inde habita prima æquatione,detrahemus numerum radicum,& eſt 6,& habebimus ſecundam,uel ſecunda habita,addemus 6 numerum radicum,& fiet æquatio prima,uerum in cæteris denominationibus regula generalis dari non poteſt.

2 Verum generalis eſt regula,cum media denominatio,numero & extremæ denominationi æquatur,tunc conuertetur in aliam mediam denominationem,tantundem à numero diſtantem,quantum prior media ab extrema denominatione diſtabat. Sic pro exemplo,ſi cubus & numerus æquales ſint rebus, cubus cum eodem numero, quadratis etiam ęquabitur,ſed non ſub rerum numero exiſtentibus.Ratio uero habendi mediam denominationem eſt,deprime maiorem denominationem ex medijs,per minorem,& radicem numeri æquationis, ſumptam ſecundum naturam denominationis extremæ,reduces ad denominationem quæ exijt,& cum eo numero,multiplicabis numerum denominationis mediæ proximioris maximæ denominationi extremæ, aut diuides numerum proximioris numero,& qui exit, numerus eſt denominationis mediæ, uelut ſi cubus & 16 æquentur 6 quadratis, erit ex dictis cubus & 16,æqualia rebus.harum numerum ſic uenabimur,deprime q̃dratum per res,exeunt res, accipe ℞ cub: 16, nam cubus eſt extrema denominatio, & eam reduc ad naturam rei, cum res ſit id,quod prouenit,diuiſo quadrato per rem, fiet igitur ℞ cub. 16, quoniam res non auget nec minuit,igitur ducemus ℞ cub. 16 in 6 numerum quadratorum,qui ſunt proximiores cubo,quàm numero, & fient res ℞ cub. 3456 æquales 1 cub. p: 16. Exemplum aliud, cubus & 8 æquantur 18 rebus,dices igitur,cubus & 8, æquantur quadratis,diuide igitur quadratum per rem exit res,accipe ℞ cubicam 8, quia cubus eſt maxima denominatio,& eſt 2,ea non eſt deducenda aliter,cum res ſit denominatio exiens,fiet igitur 2 diuiſor 18 numeri rerum,

rum, quia res ſunt proximiores numero, quàm cubo, & exibit 9, numerus quadratorum æqualium cubo p: 8, eodem modo, ſi dicamus 1 q̄d'q̄d^{m} p:64 ęq̄tur 10 cubis, cadet tranſmutatio rebus in 1 q̄d'q̄d^{m} p:64 ęquale rebus, diuide igitur cubū per rem exit quadratum, duc ℞'℞ 64 quæ eſt ex natura q̄d'q̄d^{ti}, & eſt ℞ 8, ad naturam quadrati, ſcilicet denominationis exeuntis, fit 8, quē duc in 10, numerum cuborum, quia ſunt proximiores maximæ denominationis, & fiunt res 80, cõtra diuide res 80 per 8 ad habendum numerum cuborum.

1 q̄d'q̄d. p: 64	10 cub.
1 q̄d'q̄d. p: 64	rebus
℞ 8	q̄d. 8
	10
	res 80

Eadem ratio tenet, ubi denominatio media cum numero, æquatur extremæ, ſeu duæ denominationes extremæ, numero æquales fuerint, nam eadem regula unam æquationem in aliam tranſmutabimus. Vt pro exemplo, cubus ęquetur 9 rebus p: 10, dicemus igitur, cubus p: q̄drato ℞ cubicæ $72\frac{9}{10}$ æquantur 10, & ſi cubus ęquatur 6 q̄dratis p: 16, erit cubus & res ℞ cub. 3456, æqualis 16. Et ſi cubus p: 18 rebus, æquatur 8, erit cubus æqualis 9 q̄dratis & 8 numero. Et cum relatum primum p:6 cubis æquatur 80, erit relatum primū æquale quadratis p:80. diuide igitur cubum per quadratum, exit res, ſume ℞ relati 80, & eam reducito ad naturam rei remanet ℞ relati 80, quam ducito in 6 numerum cuborum, fit ℞ relati 622080, numerus quadratorum, igitur R^{m} p^{m} æquatur q̄dratis ℞ relati 622080 p:80 numero, eadē ratione, ſi R^{m} p^{m} p:30 rebus, æquale ſit 32 numero, tunc erit R^{m} p^{m} æquale q̄d'q̄drato & 32 numero, diuide q̄d'q̄d^{m} per rem, exit cubus, reducito 2 ℞ relati 32 ad cubum, fit 8, diuide 24 numerum rerum per 8, exit 3 numerus q̄d'q̄dratorum, qui cum 32 æquantur relato primo. 3

R^{m} p^{m} p: 6 cub.	80
R^{m} p^{m} q̄d. p:	80
R rel:80 — res ℞ rel: 80	
	6
q̄d. ℞ rel: 622080	

Sed pro habenda æſtimatione in ſingulis, diuides q̄dratum radicis numeri ęq̄tionis, ſumpta ipſa radice, ſecundum naturam maximę denominationis, per æſtimationem quam habes, quod exit eſt æſtimatio conuerſi capituli. Exemplum, dictum eſt, quòd ſi cubus & 8 æquatur 18 rebus, cubus & 8 æquabitur 9 q̄dratis. In prima autem æquatione res ualet 4, uel ℞ 6 m: 2, dico, quod ſi acceperis ℞ cubicā 8, quæ eſt 2, & duxeris eam in ſe fit 4, & diuiſeris per priores æſtimationes, ſcilicet 4, uel ℞ 6 m: 2, exibunt 1, uel ℞ 24 m: 4, ęſtimationes cubi p: 8 æqualium 9 q̄dratis. Et eodem modo dictum eſt, quod ſi R^{m} p^{m} p: 6 4

e,& f h ad e,ut e ad a d,& e ad a d,ut a d ad k h, erunt quinque lineæ m d,f h, e,a d,h k,continue proportionales,igitur ex 34ª 11ª elementorum & 17ª 6ª erit g h ad a c,ut m d ad h k,utraque enim duplicata ei,quæ eſt f h,ad a d, quare quod ex d m quinta in a c quadratum ſecundæ,æquale eſt ei,quod ex k h prima in g h quadratū quartæ.Igitur corpus k o eſt numerus propoſitus,& cum cubo b g æquatur rebus totidem,quot ſunt in ſuperficie g k,at g k æqualis eſt ſuperficiei ex c in a m,eſt autem e radix cubica numeri d b, propoſiti, ex 34ª 11ª elementorum,& a m numerus quadratorum, ut propoſitum eſt,igitur numerus rerum g k fit ex radice cubica numeri æquationis in numerum quadratorū, & numerus ęquationis manet idem ſcilicet corpus k o & b d,quorum unum alteri ęquale eſſe demonſtrauimus. Supereſt itaque,ut oſtendamus ęſtimationem rei, quę eſt a d in uno,& f g,in altero eſſe,quales proponuntur,cadit enim inter eas proportionalis media e radix cubica numeri propoſiti,igitur ex 16ª 6ª elementorum diuiſo quadrato e per unam earum exibit reliqua.Eodem modo probaremus reliquam partem regulę,& generaliter,ſed breuitati conſulendum eſt,in his quæ ordinem habent eum,ut unum ex altero cognoſcatur.

Regula.

Eſt & alius tranſmutandi modus,manente quidem denominationum numero,uariato autem ęquationis numero,uerū in reliquis eandem habet rationem,regula igitur eſt. Accipe radicem numeri æquationis,ſecundum naturam denominationis mediæ,quā habes, & eam reduces multiplicando ad naturam denominationis mediæ,quam uis æquari extremis in conuerſione,& hic eſt numerus in ſecunda æquatione. Exemplum,ſi dico,cubus & 8 æquatur 18 rebus , tu ſcis ex tabula ſuprapoſita,quæ huic ſeruit regulæ,quod tranſmutatur in cubū & numerum æqualia quadratis,at ex hac regula liquet,quòd numerus quadratorum æquatur numero rerum, erunt igitur cubus & numerus æquales 18 quadratis,pro numero igitur ęquationis accipe 8, quia res non habent radicem,& duc in ſe,fiet 64 , numerus æquationis,duxiſti autem in ſe,quia denominatio media in quam fienda eſt tranſmutatio,eſt quadratum.Eadem ratione,ſi dicatur , 1 q̄d'q̄dratū p:8,æquatur 12 rebus,traducetur in q̄d'q̄dratum & numerum æqualia cubis,quare reducemus 8 ad cubum & fiet 1 q̄d'q̄dratum p: 512, æquale 12 cubis.Et ita,ſi dicatur, 1 p^{m} R^{m} p:8,æquatur 5 cubis,tranſmutatio fiet in R^{m} p^{m} p:numero,æquale 5 quadratis,ex tabula uel regula,igitur pro numero (quia denominatio media in propoſito eſt cubus) ſumemus R cub.8,quæ eſt 2,& eam deducemus ad naturā qua-

 drati

drati,quia quadratum eſt denominatio media in tranſmutatione, fiet igitur 4,quare erit R^{m} p^{m} p:4, æquale 5 quadratis.

7 Eadem ratio tenet,cum numerus & media denominatio extremę æquantur,ut tranſmutetur in capitulum denominationum æqualium numero.Exemplum,ſi dicamus,1 p^{m} R^{m} p:4 cub.æquatur 64, accipiemus propter cubum ℞ cubicam 64,& eſt 4,& eam reducemus ad quadratum denominationem mediam,in quam fienda eſt tranſmutatio,& habebimus 1 p^{m} R^{m} æquale 4 q̄dratis & 16 numero, & ſi 1 p^{m} R^{m} p:4 rebus æquatur 5,quia res non habet radicē, reducito 5 ad naturam quadratiquadrati,& fit 625, ideo dicemus, quòd 1 R^{m} p^{m} æquatur 4 quadratisquadrati p:625.

8 Aeſtimationis ratio ſic habetur in media denominatione æquali extremæ & numero.Reducito æquationem quam habes in naturam denominationis mediæ,in quam fienda eſt traſmutatio , & hoc abijce ex numero denominationis medię,& ℞ reſidui,ſumpta ſecundum naturam denominationis mediæ,ex qua fit tranſmutatio,eſt rei æſtimatio.Exemplum , ſi p^{m} R^{m} p:64 æquatur 12, cubis dicemus p^{m} R^{m} p: 16 æquatur 12 q̄dratis,ęſtimatio primę ęquationis eſt 2, & quia media denominatio in quam fit tranſmutatio eſt q̄dratum,ducemus 2 in ſe fit 4, abijce ipſum ex 12 numero cuborum , fit 8,reſiduum cuius ſumemus ℞ ſecundum naturam denominationis mediæ,ex qua fit tranſmutatio , & eſt cubus.igitur ℞ cub.8,quæ eſt 2,erit etiam æſtimatio rei in ſecunda æquatione.Aliud Exemplum,ſi p^{m} R^{m} p: 64, ęquatur 24 q̄dratis, tu ſcis,quòd tranſmutatur in p^{m} R^{m} p: 512 æquale 24 cubis, æquatio autem primi propoſiti fuit 2,cubus fit 8, nam media denominatio ſecunda eſt cubus,abijce 8 ex 24,numero q̄dratorum,relinquitur 16 cuius ℞ quadrata,id eſt ſumpta ſecundum naturam denominationis mediæ , primæ æquationis, quæ eſt 4,eſt æſtimatio p^{1} R^{1} p:512 æq̄lis, 24 cubis.

1 p^{m} R^{m} p: 64	12 cub.
1 p^{m} R^{m} p: 16	12 q̄d.

1 p^{m} R^{m} p: 64	24 q̄d.
1 p^{m} R^{m} p: 512	24 cu.

9 Sed ubi intermedia denominatio iungitur numero uel extremæ denominationi,facto tranſitu in comparem, ex 7^{a} regula , reduces ut prius æſtimationem quam habes in naturam denominationis medię, cuius quæris æſtimationem,& ei adde numerum denominationis mediæ,ſi media denominatio cuius æſtimatio quæritur,iuncta fuerit numero,uel minuemus,ſi iuncta fuerit extremæ denominationi , & eius aggregati uel reſidui ℞ ſumpta,ex natura denominationis mediæ, cuius æſtimatio cognita eſt , erit æquatio ſecundæ quæſtionis quæſita. Exemplum.ſit R^{m} p^{m} æquale 3 cubis p:8, & æſtimatio rei cognita 2 ,

& tranſ=

& tranſmutatur ex regula ſeptima in R^m p^m p: 3 quadratis æqualia 4, reduco igitur 2 ad naturam quadrati mediæ denominatiõis, cuius quęritur æſtimatio. Sit

| R^m p^m 3 cub. p: 8
| R^m p^m p: 3 q̃d. 4

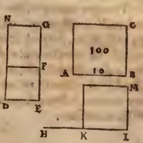
4, ex hoc abijcio 3 numerum quadratorum, quia quadrata ſunt iuncta R^o p^o, & non numero, relinquitur 1, huius ℞ cub. quæ eſt 1, eſt rei æſtimatio, eſt autem cubus denominatio media æquationis iam cognitæ. Rurſus ſit R^m p^m ęquale 7 q̃dratis p: 4, & ſit tranſmutatio in R^m p^m p: 7 cubis æquale 8, ex 7^a regula, & ſit huius cognita æquatio, quæ ſit 1, & uelim reliquam, reduco 1 ad q̃dratum, mediam denominationem ignotam, & ſit 1, huic addemus 7 numerus q̃dratorum, quia media denominatio ignota, quæ eſt q̃dratum, iungitur numero, ſcilicet 4, & habebimus 8, huius ℞ cubica ſumpta ex natura mediæ denominationis cognitæ, & eſt 2, talis ℞ cubica, eſt rei æſtimatio, quando p^m R^m æquatur 7 q̃d. p: 4.

| R^m p^m p: 7 cub. 8
| R^m p^m 7 q̃d. p: 4

Ex hoc patet, quòd ſemper, habito uno capitulo, per ſecundam, tertiam & quartam regulam, uel per ſextam, ſeptimã, octauam, & nonam, habebimus aliud generaliter, ſi generaliter, uel particulatim, ſi particulatim. Exemplũ igitur tale ſit, cognito capitulo cubi & rerum æqualium numero, proponatur cubus æqualis 3 quadratis & 10 numero, habebimus igitur ex ſeptima regula cubum & 3 res æquales ℞ 10, æquatio huius eſt ℞ v: cub. ℞ 3 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 2 $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cub. ℞ 3 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 2 $\frac{1}{2}$ huius igitur quadratum, addito 3 numero quadratorum, quia quadrata iunguntur numero, erit æſtimatio cubi æqualis 3 q̃dratis & 10 numero, & hoc eſt, quia denominatio media cognita, quæ eſt res, non habet ex ſe radicem, & ſic primo generaliter capitulum cubi æqualis q̃dratis & numero, aliaq́ multa capitula inueni, duplici uia. Cor^m 6

Demonstratio.

Et ne hoc uoluntarium uideatur, demonſtratio huius adijcienda eſt, in uno pro omnibus, ſit cubus D F, cum A B numero, ęqualis D G numero rerum, id eſt corpori D G, ſit autem H L, numerus rerum, æqualis D G ſuperficiei, in numero, & ſit quod ex H K in K M, ęquale A C numero, & quadrato A B, erit igitur quod ex H L in K M, ęquale A C & cubo K L, & ſimiliter, quod ex D E in D G, ęquale cubo D F, & numero A B, D E autẽ eſt latus D F, & K L latus K M, ſed H L æqualis eſt D G, cum igitur ex H K in K M fiat A C, & ex D E in F N, A B, 10



poſita

poſita N F radice K M,& D E radice H K, neſcio ſi ex D E in F N, fit A B, ex H K in K M fit A C, nãq; hoc à Theone in Euclidis cõmentario eſt de monſtratum, igitur cum æſtimatio rei in uno ſit K L, in altero D E, ſequitur ut ſublata F D, æquali H K (utraq; enim æquatur quadrato D E) ex H L, relinquatur K L, rei æſtimatio, quod eſt propoſitum.

11 Eſt & genus tranſmutationis in diſsimile, ut cum q̃d'q̃d^m æquatur rebus & numero, & res eſt ℞ 5 p: 2, gratia exempli, erit q̃d'q̃d^m p: eiſdem rebus æquale eidem numero, & res erit eius apotome, uidelicet ℞ 5 m: 2, & econtra.

12 Tranſmutantur & ea, quæ conſtant ex quatuor nominibus, cum fuerint tres partes continue proportionales, & æquales rebus uel cubis, dico autem, numerus & q̃dratum & q̃d'q̃d^m, nam diuiſo numero rerum per ℞ numeri, exit numerus cuborum, multiplicato uero numero cuborum, per ℞ numeri, producitur numerus rerum æqualium q̃d'q̃drato & q̃drato & numero eiſdẽ, uelut, ſi q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64, æquantur 10 cubis, igitur ducto 8 ℞ 64, in 10 numerum cuborũ, erit 1 q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64, æquale 80 rebus. Habita autem una æquatione, diuide cum ea ℞ numeri, quod exit, eſt reliqua æquatio, uelut 1 q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64, æquatur 56 rebus, & res eſt 4, erit 1 q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64 æquale 7 cubis, inde diuiſo 8 radice 64, per 2 priorem æquationem, exit 4, ſecunda æquatio, q̃d'q̃drati p: 8 q̃dratis p: 64, æqualium 7 cubis.

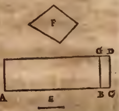
13 Eſt etiam tranſmutatio capitulorum ex tribus conſtantium, in capitula ex quatuor, & pro exemplo, regulam unam exponam, ſi ſit capitulum cubi & numeri æqualium q̃dratis, conuertetur in capitulum cubi & rerum, æqualium q̃dratis & numero, hoc modo, manente numero q̃dratorum, duc dimidium numeri q̃dratorum in ſe, & productũ eſt numerus rerũ, quæ ſunt cũ cubo, & octaua pars prioris numeri eſt ſemper numerus, qui eſt cum q̃dratis, & æquatio ſemper manet eadem. Exemplum, cubus p: 16 æquatur 14 q̃dratis, duc 7 dimidium 14 in ſe, fit 49, accipe $\frac{1}{8}$ de 16, quod eſt 2, habebis 1 cub. p: 49 rebus æqualẽ 14 quadratis p: 2. Aliud, cubus & 40, æquatur 8 quadratis, duc 4 dimidium 8 in ſe, fit 16, numerus rerum, accipe $\frac{1}{8}$ de 40 quod eſt 5, igitur cubus & 16 res æquantur 8 quadratis p: 5, & æquatione una inuenta, habes reliquam cũ ſint eædem, demonſtratio huius non eſt hic neceſſaria.

Docetur

Docetur æquatio generaliter mediæ denominationis æqualis extremæ & numero. Cap. VIII.

Demonstratio.

Sit inquam, cubus quadrati & numerus F æqualis aliquibus 1
rebus, & ſit numerus rerum A D, & ſit B D portio, ex qua
ſumpto latere, quale relati primi E, & ducto in A G reliquũ
numeri rerum, fiat F numerus æquationis, dico E eſſe rei
æſtimationem, nam quia ex ſuppoſito, ex B
in A G, fit F, & ex E in B D, fit cub. E, eo quod
E fuit latus relatum, B D, & productum ex E
in A G, & in B D, æquale eſt producto ex E in
A D, ſequitur cum A D, ſit numerus rerũ, quod
res æquantur cubo quadrato, & numero F,
exiſtente æſtimatione ipſius E.



Regula.

Secundum hoc formabitur regula, cum
fuerint denominatio media & numerus, æquales mediæ, & ex nume 2
ro mediæ denominationis, feceris duas partes, ex quarum una in radi
cem alterius, ſumptam ſecundum naturam denominationis, proueni-
entis ex diuiſione extremæ per mediam, & deductam ad naturam ip-
ſius mediæ denominationis, fiat numerus æquationis, tunc radix ipſa
anteq̃ deducetur ad naturam denominationis mediæ, eſt rei æſtima-
tio. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato & 21, tunc quia res ſunt
immediatę quadrato & numero, ſufficit facere de 10 duas partes, ex
quarum una in aliam fiat 21, & erunt 7 & 3, & utraq; eſt rei æſtima-
tio. Aliud, 10 res, æquantur cubo & 3, hic res eſt coniuncta numero,
ſed non cubo, cum intermediet quadratum. Ideo diuidemus cubum
per rem, exit quadratum, dicemus igitur fac ex 10, duas partes, ex
quarum una in quadratam alterius radicem, fiat 3, & erunt 1 & 9, nã
ex 1 in 3 R 9 fit 3, ideo talis R ſcilicet 3, eſt rei ęſtimatio. Aliud, 10 cu
bi æquales ſunt q̃d'q̃drati, & 64, iam hic cubus hæret q̃d'q̃drato, & à
numero diſtat intermediantibus q̃drato & re, dices igitur, fac de 10
duas partes, ex quarum una in alterius cubũ, producatur 64, & erunt
partes 8 & 2, qui ad cubum deducendus eſt, igitur 2 eſt rei ęſtimatio,
ſcilicet quòd oporteat ſemper numerum cum quo operamur, eſſe rei
æquationem. Aliud, & eſt quarti modi exemplum, 10 cubi æquan-
tur p° R° & 48, tũc iam cubus diſtat à R° p°, intermedio q̃d'q̃drati, &
à numero interpoſitis quadrato & re, diuide igitur R^{m} p^{m} per cubum,

 exit

exit quadratum, dicemus, fac de 10 numero mediæ denominationis dúas partes, ex quarum una, in cubum radicis quadratæ alterius producatur 48 numerus æquationis, & erunt partes 6 & 4, nam ex 6 in 8 cubum 2 radicis quadratę 4, fit 48, ideo ipſum 2 radix quadrata 4, eſt rei æſtimatio. Manifeſtum eſt igitur, quod ſemper ſumimus radicem ex natura denominationis, ſecundum quam media in maiore continetur, & deducimus eam ad naturam ipſius mediæ, & qui ſcit hoc facere, nouit capitulum, & qui nouit capitulum, ſcit etiam hoc facere.

3 Eſt uero manifeſtum, quod cum media denominatio, extremæ & numero æqualis eſt, tunc in omnibus, prætereꝗ in maximo numero, duas æſtimationes neceſſario habet.

De ſecunda incognita quantitate non multiplicata. Cap. IX.

GEneraliter hucuſꝗ noua inuenta tractauimus, nunc uero de ſingulis dicendum ſpeciebus eſt, namꝗ ſæpius illud occurrit, ut quæſtionem propoſitam, duplici poſitione ſoluamus. Eiuſmodi autem eſt exemplũ, quando aliter uix rem hanc poſſumus explicare. Tres erant uiri pecunias habentes, Primus cũ dimidio reliquorum habuit aureos 32. Secundus cũ reliquorũ tertia parte 28. Tertius cũ reliquorum parte quarta 31, quæritur quantum quiſꝗ habuit? Statuemus primo rem ignotam primam, ſecundo ſecundam rem ignotam, tertio igitur 31 aurei, minus quarta parte rei, ac quarta parte quantitatis relicti ſunt, iam igitur uide, quantum habet primus, equidem ſi illi dimidium ſecundi & tertij adijcias, habiturus eſt aureos 32, habet igitur per ſe aureos 32 m: $\frac{1}{2}$ quan: m: 15 $\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ poſ: p: $\frac{1}{8}$ quant: quare habebit 16 $\frac{1}{2}$ m: $\frac{3}{8}$ quant: p: $\frac{1}{8}$ poſ: hoc autẽ cum ſit ęquale uni poſitioni, erit $\frac{7}{8}$ poſ: & $\frac{3}{8}$ quant: æquale 16 $\frac{1}{2}$, quare deducendo ad integra 7 poſ: & 3 quant: æquabuntur 132. Rurſus uideamus, quantum habeat ſecundus, habet hic 28, ſi ei tertia pars primi ac tertij addatur, ea eſt $\frac{1}{3}$ poſ: p: 10 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ poſ: m: $\frac{1}{12}$ quant: hoc eſt igitur $\frac{1}{4}$ poſ: p: 10 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ quant: abijce ex 28 relinquitur, 17 $\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$ quant: m: $\frac{1}{4}$ poſ: & tantum habuit ſecundus. ſuppoſitum eſt autem habere illum quantitatem, quantitas igitur ſecunda, æqui ualet $\frac{1}{12}$ fuimet,

Pri:	Secund:	Terti:
res	quan:	31 m:

Quarta parte reliq̃rũ

primus 16 $\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ poſ: m: $\frac{3}{8}$ quan: æqualia poſitioni primæ

$\frac{7}{8}$ poſ: p: $\frac{3}{8}$ quan: æq̃lia 16 $\frac{1}{2}$

Secundus 17 $\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$ quan: m: $\frac{1}{4}$ poſ: æq̃lia quantitati ſecundę

$\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ poſ: æqualiæ 17 $\frac{2}{3}$

met,& 17 $\frac{2}{3}$ m: $\frac{1}{4}$ poſ: abiectis communiter $\frac{1}{12}$ quantitatis,& reſtituto m: alteri parti,fient $\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ poſ: æqualia 17 $\frac{2}{3}$, quare 11 quan: p: 3 poſ: æqualia erunt 212, multiplicatis partibus omnibus per 12 denominatorem,inde duces quamuis earum ad æqualitatem alterius, in poſitionum aut quantitatum numero,ut pote dicendo, 3 poſ: p: 11 quan: æquantur 212,uolo modo ut ſint 7 poſitiones,& erunt per regulam quatuor quantitatum proportionalium, 25 $\frac{2}{3}$ quan: æquales 494 $\frac{2}{3}$,habes igitur,ut uides,7 poſ: p: 3 quantitatibus æqualia 132,& 7 poſ: p: 25 $\frac{2}{3}$ quantitatibus æqualia 494 $\frac{2}{3}$, igitur cum 7 poſ: ſint idem,in utroque erit differentia quantitatum,ſcilicet 22 $\frac{2}{3}$,æqualis numerorum differentiæ,quæ eſt 362 $\frac{2}{3}$, diuide igitur,ſicut in poſitione ſimplici,per capitulum tertium, 362 $\frac{2}{3}$, per 22 $\frac{2}{3}$, exit 16, æſtimatiō quantitatis, & tantum habuit ſecundus. Rurſus ponamus primo eſſe rem,ſecundo iam erant 16,tertio ſit ſecunda quantitas,cumque ſecundus cum tertia parte primi & tertij,habeat 28,ipſe autem habeat 16, erit $\frac{1}{3}$ poſ: p: $\frac{1}{3}$ quantitatis æqualis 12,reſiduo 16 & 28,& ideo 1 poſ: p: 1 quantitate æquabuntur 36,at uerō primus,cum dimidio reliquorum habuit 32, dimidium reliquorum eſt 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: igitur 1 poſ: p: 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: æquantur 32, igitur abiecto 8, fiet 1 poſ: p: $\frac{1}{2}$ quan: æq̃lis 24, quia igitur 1 poſ: p: 1 quan: æquabatur 36,igitur differentia 24 & 36,quæ eſt 12,æquatur dimidio quantitatis,quare per modum capituli tertij,diuiſo 12 per $\frac{1}{2}$, exit 24,æſtimatio quantitatis,ſeu numerus aureorũ tertij,iam igitur conſtat ſecundũ habuiſſe 16, tertium 24,primus autem cum dimidio ſecundi & tertij habet 32,detracto 20 dimidio ſecundi & tertij,ex 32,relinquitur 12 numerus primi, habuit igitur primus aureos 12,ſecundus 16,tertius 24. Operatio prolixa,& clara tamē ac facilis,ſemper autem reducenda eſt denominatio una ad eundem numerum,& tunc differentia numerorum æqualis neceſſario erit differentiæ alterius denominationis,ut uidiſti bis in hoc exemplo

7 poſ: p: 3 qua: æq̃l 132
3 poſ: p: 11 quan: æq̃l 212
7 poſ: p: 25 $\frac{2}{3}$ quã: æq̃l 494 $\frac{2}{3}$

7 poſ: p: 3 quan: 132
7 poſ: p: 25 $\frac{2}{3}$ quan: 494 $\frac{2}{3}$
22 $\frac{2}{3}$ quan: æquales 362 $\frac{2}{3}$

p^a	2^a	3^a
1 poſ:	16	1 quan:

$\frac{1}{3}$ poſ: p: $\frac{1}{3}$ quan: 12
1 poſ: p: $\frac{1}{2}$ quan: 24
1 poſ: p: 1 quan: 36
$\frac{1}{2}$ quan: æqualis 12

Exemplum aliud. Dixit primus ſecundo,da mihi tertiam partem tuorum,& 3 p: & habebo triplum reſidui tui. At ſecundus primo,da dimidium,& 2 p: tuorum,& quod tibi relinquetur,erit nona pars omniũ quæ ego habebo. Dabimus primo rem,ſecundo quantitatē, quia

igitur

igitur dando $\frac{1}{3}$ & 3 p:ſecundi, primo, relinquitur ſecundo $\frac{2}{3}$ quan: m: 3, & hoc eſt tertia pars aggregati primi quod eſt 1 poſitio p: $\frac{1}{3}$ quantitatis p: 3, igitur triplato $\frac{2}{3}$ quan: m: 3, & fit 2 quan: m: 9, erit hoc æquale poſ. p: $\frac{1}{3}$ quan^{tis} p: 3, quare reddendo quod eſt minus, alteri parti, fiet 1 poſitio p: 12, æqualis 1 $\frac{2}{3}$ quan^{ti}. Rurſus quia dictũ eſt, quòd ſi primus det dimidium p: 2, ſecundo, erit reſiduum ſcilicet $\frac{1}{2}$ poſ. m: 2, nona pars aggregati, quod eſt 1 quan: p: $\frac{1}{2}$ poſ. p: 2, igitur multiplicando tale reſiduum per 9, fiet 4 $\frac{1}{2}$ poſ. m: 18, æquales 1 quan: p: $\frac{1}{2}$ poſ^{bus} p: 2, reddendo minus alteri parti, & auferendo ſimilia, habebimus 4 poſ. æquales 1 quan^{ti} p: 20, habebas etiam 1 poſ. p: 12 æqualem 1 $\frac{2}{3}$ quan^{ti}, reducito partes ad ęqualitatẽ unius denominationis, & primo multiplicando 1 poſ. p: 12, ęq̃lem 1 $\frac{2}{3}$ quan: per 4, fient 4 poſ. p: 48 ęquales 6 $\frac{2}{3}$, quan^{bus}, & hoc comparabis, ut uides in figura, cum 4 poſ^{bus} æqualibus 1 quan^{ti} p: 20.

Primus	Secundus
1 poſ.	1 quan:

1 poſ. p: $\frac{1}{3}$ quã. p: 3 triplum $\frac{2}{3}$ quan. m: 3

1 poſ: p: 12 ęq̃ 1 $\frac{2}{3}$ quã:

1 quã: p: $\frac{1}{2}$ poſ. p: 2 nonuplum $\frac{1}{2}$ poſ. m: 2

1 quã: p: 20 ęq̃l. 4 poſ.

& ſimiliter eadem ratione reducendo numerum quantitatũ ad æqualitatẽ, habebis 5 quan^{tes} æquales 36 p: 3 poſitionibus, & 5 quantitates p: 100, æq̃les 20 poſ^{bus}, in utroq; caſu transferes uiciſsim, per regulam, ſi æqualibus ęqualia addas, tota quoq; fient æqualia, & habebis 4 poſ^{es} p: 68 p: 1 quan^{te} æq̃les 4 poſ^{bus} p: 6 $\frac{2}{3}$ quan^{bus} inde abiectis ſimilibus, relinquentur 5 $\frac{2}{3}$ quan: æquales 68, igitur diuiſo 68, per 5 $\frac{2}{3}$, exit 12 ęſtimatio quantitatis, & id quod habuit ſecundus. Eadem ratione, transferes in ſecunda æquatione, partes diſsimiles, dicendo, ſi 1 quan: æquantur 36 p: 3 poſ^{bus}, & 5 quan: p: 100, æquantur 20 poſ^{bus}, igitur 5 quan^{tes} p: 20 poſ^{bus}, æquantur 5 quan^{bus} p: 3 poſ^{bus} p: 136, inde abiectis ſimilibus relinquuntur 17 poſ^{es} æquales 136, quare diuiſo 136 per 17 exibit 8, poſitionis æſtimatio, ſeu numerus primi, habuit itaq; primus 8, ſecundus 12, & quamuis aliter hęc etiã ſolui poſsint, hoc tamen proprium eſt magis & purum, ut uno eodemq; impetu tota quæſtio abſoluatur, & ſi etiam primum exemplum per ſolum rem oſtendi queat.

4 poſ. p: 48 æq̃les 6 $\frac{2}{3}$ quan:
4 poſ. æq̃les 20 p: 1 quan:

4 poſ. p: 68 p: 1 quan: æq̃les
4 poſ. p: 6 $\frac{2}{3}$ quan:

5 $\frac{2}{3}$ quan: æqualis 68

5 quan: æqual. 36 p: 3 poſ.
5 quan: p: 100 ęqual. 20 poſ.

5 quan: p: 20 poſ. æqual.
5 quan: p: 3 poſ. p: 136

17 poſ. æquales 136

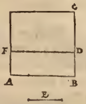
De

De ſecunda quantitate incognita multiplicata. Cap. X.

CVm uero duæ quantitates incognitæ multiplicantur, aut in ſe ducantur, quatuor fient modi, quorum maior pars tria habet membra. 1

Demonstratio.

Primus eſt, cum quadratum unius, & quantitates ipſæ comparantur. Sit igitur primo quadratum A C, cuius latus A B, æquale duplo A B & quintuplo E, gratia exempli, igitur poſita B D æquali numero rerum, ſcilicet 2, erit A D æquale duplo A B, igitũ C F æquatur quintuplo E, quare ex 15^a ſexti elementorum, A B ad E, ut 5 ad C D, eſt autem A B poſitio, & C D poſitio m: 2, & 5 numerus cognitus, quare regula eſt.

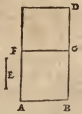


Regula.

Poſita re quantalibet, duc eam in ſe, detracto numero rerum, & quod exit, diuide per numerũ ignotæ quantitatis, exibit æſtimatio ignotę quantitatis. Exemplum, ponatur res 7, ducatur in 2 m: ſe, quia poſitum fuit, ut æquaretur duabus rebus, & quinq; quantitatibus, fiet 35, diuide 35, per 5 numerũ quantitatum, exit quan: etiam 7, & ſi ponatur res 10, ducemus eam in 2 m: id eſt in 8, & fiet 80, unde diuiſo 80 per 5, exit 16, quantitas 2^a. Quod ſi quantitas 2^a ponatur cognita, multiplicabimus eam per ſuum numerum, & producto addemus quadratum dimidij ipſius numeri rerum, & radix totius, addito dimidio numeri rerum, eſt æſtimatio rei. Exemplum, ſit 2^a quantitas 16, ducemus in 5 fit 80, adde 1, quadratum dimidij numeri rerum, fit 81, huius ℞ eſt 9, cui addito dimidio numeri rerum fit 10, quantitas ipſius rei.

Demonstratio.

Rurſus, ſit decuplum A B, æquale quadrato A B & ſeptuplo E, gratia exempli, & ſit quadratum A B ſuperficies A C & B D ſit 10, igitur ſeptuplũ E æquale eſt F D ſuperficiei, & ut in pręcedenti, A B ad E, ſic 7 ad C D, quare regula eſt, cum res æquantur quadrato rei & quantitatibus. 2



Regula.

Poſitam rem quantamcunq; libuerit, minuemus ex numero rerum, & ducemus eam in reſiduum, productum diuidemus cum numero quantitatum, quod exit eſt quantita

tis æſtimatio. Exemplum, ponatur hoc in caſu res 8, minue ex 10 numero rerum, relinquuntur 2, quos duc in 8, fit 16, diuide per 7 numerum quantitatũ, exit $2\frac{2}{7}$ æſtimatio quantitatis, quod ſi ſecunda quantitas cognita ſit, ducemus eam in numerum ſuũ, & quod producitur, à quadrato dimidij numeri rerum minuemus, & radix reſidui, addita uel detracta, à numeri rerum dimidio, oſtendit æſtimationem rei. Exemplum, ponatur quantitas ſecunda $2\frac{2}{7}$, ducatur in 7 numerum quantitatum, fit 16, abijce hunc numerum ex 25, quadrato dimidij 10 numeri rerum, & relinquitur 9, cuius radix addita uel detracta à 5, dimidio 10 numeri rerum, oſtendit 8 uel 2, æſtimationes ipſius rei.

Demonstratio.

3 Sit etiam E numerus, æqualis quadrato A B, quod eſt A C, & numero A B qui eſt ſuperficies F D, poſita igitur A B prima, numero E ſecũda, E tertia, B D quarta, erit proportio A B ad E, ut numeri E ad B D, quare regula erit, cum quantitates æquantur rebus & quadrato rerum.

Regvla.

Poſita rem quantamcunque libuerit, ducemus in aggregatum ex ipſa & ſuo numero, & productum diuidemus per numerum quantitatum, & quod exit eſt æſtimatio quantitatis. Exemplum, 5 quantitates æquãtur 7 rebus, & quadrato rei, & res eſt 3, dicemus igitur, duc 3 in 10, aggregatum 3 æſtimationis rei & 7 numeri rerum, fit 30, diuide per 5, numerum quantitatum, exit 6, æſtimatio quantitatis. Quod ſi quantitas ſecunda ſit cognita, ducemus eam in ſuum numerum, & producto addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius, detracto dimidio numeri rerum, eſt æſtimatio rei. Exemplum, ponatur 6, quantitatis æſtimatio, quando 5 quantitates æquales ſunt 7 rebus, & quadrato rei, duc igitur 6 æſtimationem quantitatum in 5, numerũ quantitatum, fit 30, adde his quadratum $3\frac{1}{2}$ dimidij 7 numeri rerũ, ſcilicet $42\frac{1}{4}$, ab huius radice, quæ eſt $6\frac{1}{2}$, ſi auferas $3\frac{1}{2}$, dimidium numeri rerum, relinquetur 3 æſtimatio rei.

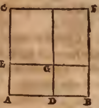
Notᵃ. Solemus autem his uti poſitionibus, cum duorum numerorum, qui ab initio ponuntur, nulla exprimitur comparatio, nec in aggregato, nec in differentia, nec in multiplicatione, nec in diuiſione, ſeu proportione, nec in radice, his enim quinque modis comparantur numeri, quare ſi unus conſiſtat, nulla eſt ſecundæ quantitatis utilitas, ſed una poſitione quæſtio ſoluitur.

Demonstratio.

4 Quod ſi productum, ex re in quantitatem, quantitatibus & rebus comparetur, conſurgent duo modi tantum, aut enim tale productũ,

quan-

quantitatibus & rebus æquabitur, aut res æquabuntur producto & quantitatibus, ſit & res A B, quantitas A C, numerus quantitatum A D, numerus rerum A E, erunt igitur ex ſuppoſito, duæ ſuperficies D C, & B E, æquales A F, eſt autem A F ęqualis quatuor ſuperficiebus, G A, G B, G C, G F, igitur hæ quatuor ſuperficies, æquales ſunt ſuperficiebus D C & B E, detractis itaq; æqualiter tribus ſupficiebus G A, G B, G C, relinquetur altera G A, æqualis G F, quare ex 15ª ſexti elementorum, A D ad D B, ut C E ut E A, proportio igitur numeri quantitatum, ad reſiduum ex re, ut reſidui quantitatis, ablato numero rerum, ad numerum rerum, ſecundum hoc erit regula.



Regvla.

Si nota fuerit res, abijciemus ex ea numerum quantitatū, & cum reſiduo diuidemus productum, ex numero rerum in numerum quantitatum, quod exit, eſt addendum numero rerum, & totum eſt quantitas. Exemplum, ſint 10 res & 12 quantitates, æquales producto rei in quantitatem, & ſit quantitas 18, tunc abijcies econtra, 10 numerum rerum, ex 18 quantitate, & relinquitur 8, cum quo diuide 120, productum ex 10 rerum numero, in 12 quantitatum numerum, & exit 15, quem adde, ad 12 numerum quantitatum, fit 27, rei æſtimatio, unde 10 res, ſunt 270, & 12 quantitates ſunt 216, quæ iuncta faciunt 486, productum 18 quantitatis in 27 rem, & ita poſuimus exemplum, regulę conuerſum, ut intelligas unam & eandem eſſe rationem. Quod ſi productum ipſum cognitum ſit, diuide ipſum productum per numerum quantitatum, ſi ſit minor numero rerum, aut per numerum rerū, ſi ille ſit minor numero quantitatum, & dimidium exeuntis, duc in ſe, à quo abijce illud, quod prouenit, diuiſo producto ex numero maiore in productum quantitatis, in rem, per numerum minorem, ſeu numerus rerum ſit maior, ſeu minor, & ℞ reſidui, addita uel detracta, ab eo quod in ſe duxeras, oſtendit æſtimationem quantitatis, aut rei ſcilicet, quę minore numero deſcibitur, inde diuiſo per eam producto, exit illa, quæ eſt maiore numero definita. Exemplum 2 res & 6 quantitates, ęquales ſunt quantitati rei, quæ eſt, gratia exempli 64, diuido 64 per 2, minorē quàm 6, exit 32, cuius dimidiū 16, in ſe duco, & fit 256, abijcio ex hoc, 192, qui prouenit, diuiſo

res	quan:	productū
2	6	64

32
16 — 256
6 — 64 192
384 64
2 8
192

384

384 producto 6, in 64, per 2, relinquuntur 64, cuius radix eſt 8, quæ addita uel detracta à 16 numero, quem in ſe duxiſti, oſtendit rei æſtimationem 8, uel 24, quare ſi res ualet 8, quantitas etiam erit 8, diuiſo enim 64 per 8, exit 8, & ſi res ualet 24, quantitas eſt $2\frac{2}{3}$, diuiſo 64 per 24, & in utroq; caſu, 2 res & 6 quãtitates, ęquantur 64 quantitati rei.

DEMONSTRATIO.

5 Quod ſi latus unum, æquatur producto unius in alterum, & reliquo lateri, ſit latus illud A B, & reliquum A E, numerus uero lateris A B eſt A C ſuperficies, igitur B F, fit ex ſuppoſito, ex A E in ſuum numerũ, eadem autem fit ex A B in E C, proportio igitur A B ad A E, ut numeri A B ad E C, eſt aũt E C reſiduum A B quantitatis, & A C numeri rerum, quare regula erit.

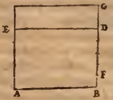
REGVLA.

Cum fuerint res æquales quantitati rei, & quantitatibus, & nota fuerit quantitas, minuemus eam ex numero rerum, deinde ducemus quantitatem in ſuum numerum, & productum diuidemus per tale reſiduum, quod exit, eſt æſtimatio rei. Exemplũ, 10 res, æquantur quantitati rei, & quatuor quantitatibus, & quantitas ipſa eſt 8, auſero 8 ex 10, relinquitur 2, duco etiam 8 quantitatem, in 4 numerum ipſius, fit 32, quem diuido per 2, reſiduum relictum, exit 16, æſtimatio rei, & ubi prima detractio nequiret fieri, caſus non poteſt in ueris numeris eſſe. Si uero nõ quantitas, ſed ipſa res, ſit cognita, quia ex A B, in A C, fit, quantũ ex A E in aggregatum ex A B et numero A E, diuidemus productum ex numero rerum in æſtimationem rei, per aggregatum ex re & numero quantitatum, quod exit, eſt quantitatis æſtimatio. Exemplum, 10 res æquantur quantitati rei, & 4 quantitatibus, & res eſt 16, duco 16 rem in 10 numerum rerum, fit 160, diuido per 20 aggregatum ex 4 numero quantitatum & 16 rei æſtimatione, exit 8, æſtimatio quantitatis, ſi uero quantitas rei cognita eſſet, duces talem quantitatem rei, in numerum quantitatum, & productum diuides per numerum rerum, cui exeunti, adde quadratũ dimidij eius, quod exit, diuiſa quantitate rei per numerum rerum, & radix aggregati, addito dimidio, quod prius in ſe duxeras, eſt rei æſtimatio. Exemplum, ſint 4 res æquales 5 quantitatibus, & quantitati rei, quę ſit 45, ducam 45, per 5 numerum quantitatum, fit 225, diuido per 4 numerum rerum, exit $56\frac{1}{4}$, cui addo $31\frac{41}{64}$ quadratum $5\frac{5}{8}$, dimidij prouentus 45 diuiſi per 4, & fit totum $87\frac{57}{64}$, cuius radici quæ eſt $9\frac{3}{8}$, ſi addantur $5\frac{5}{8}$ dimidium prouentus diuiſionis, fiet 15 res.

DEMONSTRATIO.

6 Cum uero quadratum rei, & quantitas rei, & res, inuicem comparantur,

rantur,fiunt modi tres,primus eſt,cum quadratũ rei,ęquale eſt quantitatibus rerum & rebus,& ſit A B res,cuius quadratum A C, & ſit B F quantitas,& A D quantitates rerum,& erit,ut quoties B F in B D continetur,totus ſit numerus quantitatis rei, D C igitur erit rerum numerus, quia igitur B C æqualis eſt A B,& C D eſt numerus rerum,erit ut detracto numero rerum ex re,relinquatur B D,productum ex numero quantitatis rei,in quantitatem.unde regula.



REGVLA.

Cum quadratum rei æquatur rebus, & quantitatibus rerum,ſi res eſt cognita, auferemus ex ea numerum rerum,reſiduum diuidemus per numerum quantitatis rei, & prodibit quantitas.Exemplum,10 res cum 4 quantitatibus rerum, æquantur quadrato rei,& res eſt 30,aufero 10 ex 30,relinquitur 20,quem diuido per 4,numerum quantitatis rei, & exit 5, æſtimatio quantitatis. Quòd ſi quantitas nota ſit,ducemus eam in numerum quantitatis rei, & producto addemus numerum rerum,& conflabitur rei æſtimatio. Exemplũ,10 res & 4 quantitates rei,ęquantur quadrato rei, & quantitas eſt 7,ducemus 7 in 4 numerum quantitatis, & fiet 28, cui addemus 10 numerum rerum,fiet æſtimatio rei 38.Si uero productum ex re in quantitatem cognitum fuerit,ducemus ipſum in numerum quantitatum rerum,& ei addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius cum dimidio numeri rerum ſuperaddito, eſt æſtimatio rei.Exemplũ,q̃dratũ rei ęquatur 10 rebus, & quatuor quantitatibus rerum,& quantitas rei eſt 50,ducemus 50 in 4 numerum ſuum, id eſt quantitatum rerũ, & fit 200,cui addemus 25,q̃dratum dimidij 10 numeri rerum,fit 225,cuius radici addo 5, dimidium numeri rerum,& fit 20,rei æſtimatio,unde diuiſo 50 producto rei, in quantitatem exit $2\frac{1}{2}$, æſtimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.



Quod ſi quantitas rei,æqualis ſit quadratis rei & nu- 7
mero rerum,ponemus rem A B,& quantitatem B C,& quantitas rei A C,ea cauſa neceſſario erit & D C numerus rerum, & A D erit aggregatum quadratorum, igitur detracta D C ex B C,relinquetur B D,qua diuiſa per numerum quadratorum,prodibit B F æqualis A B.regula igitur eſt.

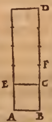
REGVLA.

Cum fuerit quantitas rei,æqualis quadratis rei & nu-

mero rerum,& fuerit nota res,ducemus eam in numerum quadratorum,& producto addemus numerum rerum , & conflabitur quantitas.Exemplum,quantitas rei æquatur 6 quadratis rei,& 10 rebus, & res eſt 4,duc 4 in 6 numerum quadratorum,fit 24,adde ei 10,numerum rerum,fit 34,æſtimatio quantitatis. Quod ſi quantitas cognita ſit,auferemus ex ea numerum rerum,& reſiduum diuidemus per numerum quadratorum rerum,quod exit,eſt æſtimatio rei.Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei,& 10 rebus , & quantitas ipſa eſt 34,aufero 10 de 34,relinquitur 24,quem diuido per 6,numerum quadratorum,exit 4,æſtimatio rei.Si uero quantitas rei cognita ſit,diuidemus eam per numerum quadratorum , & prodeunti addemus quadratum dimidij eius,quod exit diuiſo numero rerum per numerum quadratorum rerum,& radix totius,cum detractum fuerit idem dimidium, erit rei æſtimatio.Exemplum. Quantitas rei æquatur 6 quadratis rei,& 60 rebus,& quantitas rei eſt 1200,diuide 1200 per 6 numerum quadratorum rei,exit 200 , cui addo 25 , quadratum 5, dimidij prouentus 60 numeri rerum,diuiſi per 6 numerum quadratorum,fit 225,à cuius radice,quæ eſt 15, aufero 5 dimidium ipſius prouentus,& relinquetur 10,rei æſtimatio,inde diuiſo 1200 , qui eſt quantitas rei,prodit 120 æſtimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

8 Quod ſi numerus rerum,ſit æqualis quadrato rei & quantitatibus rerum (etenim ad unum quadratum,uel ad unam quantitatẽ rei, per cõmunem diuiſionẽ, ſemper,ut in uniuerſis dictũ eſt capitulis,reducere licet) ponemus A B rem,q̃dratum eius A C,numerũ rerũ B D,erit igitur E D numerus quantitatis rei,& C D numerus productus ex numero quantitatũ in quantitatem,quę ſit C F,quia igitur C D, eſt reſiduum A B & B D,erit regula hæc.



REGVLA.

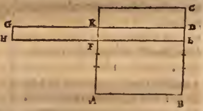
Cum fuerit numerus rerum , æqualis quantitatibus rerum,& quadrato rei,& fuerit res cognita , auferemus eam ex ſuo numero,& reſiduum diuidemus per quantitatis rei numerum,quod exit, eſt quantitatis æſtimatio . Exemplum, 10 res,ęquantur quadrato rei,& tribus quantitatibus rei,& res eſt 4, auferemus 4 ex 10,relinquuntur 6,diuido per 3,numerum quantitatum rei,exit 2,æſtimatio quantitatis.Si uero quantitas cognita ſit, ducemus eam in numerum quantitatis rei,& productum auferemus ex numero rerum,reſiduum eſt rei æſtimatio.Exemplum, 10 res æquantur quadrato rei,& producto rei in quantitatẽ ter, & quantitas eſt 2,

duce-

ducemus igitur 2 æſtimationem quantitatis, in 3, numerum quantitatis rei, & producitur 6, quem aufero ex 10, numero rerum, relinquitur 4, æſtimatio rei. Si uero productum ex re, in quantitatem, cognitum fuerit, ducemus illud in numerum ſuum, & productum auferemus à quadrato dimidij numeri rerum, & radix reſidui addita uel detracta, ab ipſo dimidio numeri rerum, oſtendit æſtimationem rei. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato rei, & 3 quantitatibus rerum, & quantitas rei eſt 8, ducam 8 in 3, numerum quantitatis rei, fit 24, hunc abijciemus ex 25, quadrato 5 dimidij 10, relinquitur 1, cuius ℞, quæ eſt 1, addita uel detracta ex 5, oſtendit 6, uel 4, æſtimationes rei, unde diuiſo 8 quantitate rei, per 6, uel per 4, exit 1 $\frac{1}{3}$ uel 2, æſtimatio quantatis.

Demonstratio.

Quod ſi quadratum rei, & quantitas rei, & quantitas, inuicem 9
comparentur, conſurgunt tres alij modi, ſit igitur primo quadratum rei, æquale quantitatibus rerum, & numero quantitatum, & ponatur A B res ipſa, cuius quadratum A C, æquale ſit quantitatibus rerũ (quæ ſint A D, ita ut D E, ſit quantitas) & numero quantitatum D E, qui ſit F H, eritq́ ſuperficies G F, æq̃lis ex ſuppoſito, ſuperficiei C K, quare ex 15ª 6ⁱ elementorum A B, ad D E, uelut H F, ad D C, eſt aũt A B res, D E quantitas, H F numerus quantitatũ, C D reſiduum rei, & producti ex numero quantitatis rei, in ipſum quantitatem, quare regula eſt.



Regula.

Cum quadratum rei, æquale fuerit productis, ex quantitate in rem & in numerum, fueritq́ res ipſa cognita, ducemus rem in numerum quantitatum rerum, & producto addemus numerum quantitatum, & cum aggregato diuidemus quadratum rei, prouentus eſt æſtimatio quantitatis. Exemplum, quadratum rei, æquale ſit ſex quantitatibus rerum, & 20 quantitatibus, & ipſa res ſit 12, duco 12, in 6 numerum quantitatis rei, fit 72, cui addo 20 numerum quantitatum, fit 92, cum hoc diuido 144 quadratum rei, exit 1 $\frac{13}{23}$, quantitas ipſa, ſi uero quantitas cognita ſit, ducemus eam in numerum ſuum, & ſeruabimus productum, deinde ducemus eandem in numerum quantitatis rerũ, huiusq́ producti dimidium, in ſe ductum, addemus priori producto & radici, ipſius aggregati, adijciemus dimidium quod in ſe duxeramus,

mus,& totum eſt æſtimatio rei. Exemplum, Quadratum rei, æquale ſit 12 quantitatibus,& 5 quantitatibus rei,& quantitas ipſa eſt 2, ducam 2 quantitatem,in 12 numerum ſuum, fit 24, deinde ducam eandem quantitatem 2,in 5 numerum quantitatis rei,& fit 10, huius dimidium quod eſt 5,duco in ſe,fit 25,addo ad 24,iam ſeruatū, fit 49, huius radici quæ eſt 7,addo idem dimidium quod eſt 5,fit 12,æſtimatio rei. Vbi autem nota eſſet quantitas rei (& eſt in figura ſuperficies E K)ducemus eam in ſuum numerum,& producti tertiam partem,ad cubum reducemus,ducemus & quantitatem rei in numerum quantitatum,& dimidium producti in ſe multiplicabimus, & ab hoc auferemus partem,quam ad cubum duxeramus, id eſt cubum ipſum,tertiæ partis,primi producti,quem ſeruaſti,& radicem huius reſidui, addemus & minuemus,à dimidio ſecundi producti,& radices cubicæ aggregati, & reſidui ſimul iunctæ, ſunt æſtimatio rei. Exemplum. Quadratum rei,æquale eſt 12 quantitatibus, & 2 quantitatibus rei, & quantitas rei eſt 24, ducam 2, in 24, fit 48, huius tertiam partem, quæ eſt 16, ducam ad cubum,fit 4096, ducam etiam 24 in 12,fit 288, cuius medietatē in ſe duco,& fit 144 medietas, & eius quadratum,20736,ab hoc aufero 4096, relinquitur 16640, cuius radicem addo & minuo à 144,fiūt 144 p:℞ 16640 & 144 m:℞ 16640, horum radices cubicæ iunctæ, ſunt rei æſtimatio.

Quad.rei.	Quan:	Quan:rei
	12	2
Quan: rei	24	
	288	48
	144	16
	20736—4096	
	16640	
	144 p:℞ 16640	
	144 m:℞ 16640	

Quòd ſi ex numero,per æqualia diuidendo,ſumpta medietas,nō producat quadratum æquale,aut maius cubo tertiæ partis primi producti,operaberis per reſiduum regulæ capituli, cubi æqualis rebus & numero,nam facta multiplicatiōe per productum,ut in exemplo per 24,qui numerus eſt quantitas rei,erit cubus æqualis rebus & numero,rebus quidem productis ex quantitate rei in numerum ſuum, numero autem producto ex quantitate rei in numerum quantitatum, ut in exemplo dictum eſt,quod quadratum rei æquale fuit 2 quantitatibus rei,& 12 & quantitatibus,& quod quantitas rei eſt 24, dicemus igitur cubus æquatur 48 rebus,p:288 numero, & 48 producitur ex 24 in 2,& 288 ex 24 in 12,ergo ponamus quod quadratum rei,ęquale ſit 2 quantitatibus rei & 3 quantitatibus,& quantitas rei ſit 8,ducemus 8 in 2,& 3,& producentur 16 & 24,igitur cubus æquabitur 16 rebus

rebus p: 24,& res ualet ℞ 13 p: 1, ex capitulo ſuo, inde diuiſo 8 quantitate rei, per ℞ 13 p: 1, exit ℞ 5 $\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quantitas ipſa, eſt autem quadratum ℞ 13 p: 1, hoc 14 p: ℞ 52 & quantitas rei eſt ℞ 75 $\frac{1}{9}$ m: $\frac{2}{3}$,

Quad. rei	Quan:	Quan:rei
	3	2
	8	
	24	16

& eſt 8, cuius duplum eſt 16,& tres quantitates ſunt, ℞ 52 m: 2, quæ iunctę cum 16, duplo quantitatis rei, faciunt 14 p: ℞ 52, q̃dratum rei.

Nota quòd in hac regula, ſemper res eſt media proportionalis, inter quantitatem & aggregatum ex numero quantitatum, & producto rei in numerum quantitatis rei, ut in exemplo, ℞ 13 p: 1, quæ eſt res, eſt proportionalis inter ℞ 5 $\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quæ eſt quantitas, & ℞ 52 p: 5, qui conſtat ex 3, numero quantitatum, & producto ex ℞ 13 p: 1, re ipſa, in 2, numerum quantitatis rei. Not^m 1

Nota etiam, quòd regula hæc pendet ex capitulo cubi æqualis rebus & numero, uelut ſequens, ex capitulo cubi & numeri æqualium rebus, & ultima, ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Not^m ſecũd.

Nota etiam, quòd res eſt eadẽ, quæ quęritur in capitulo cubi ęq̃lis rebus & numero, ſed quantitas, eſt numerus, qui prouenit diuiſo quocunq; numero, per rem ipſam, nam eidem capitulo, cubi æqualis rebus & numero, competit una ſola res, ſed infinitæ quantitates, uelut dictum eſt hic, quod res eſt ℞ 13 p: 1, & diuiſimus 8, quantitatem rei, ſi autem ponatur cubus æqualis 16 rebus & 24 numero, erit res ſemper ℞ 13 p: 1, ſed poſita quantitate rei 4, erit numerus quantitatis 6, & quantitatis rei 4, & quantitas ℞ 1 $\frac{4}{9}$ m: $\frac{2}{3}$. Not^m tertiũ.

Demonstratio.

Quod ſi quantitas rei, æqualis ſit quadratis rei, & quantitatibus, ponemus A B rem, & quantitatem B C, & numerum quadratorum, ſecundum quem B G, æqualis A B, continetur in B D, & erunt quadrata A D, iuncta, & E C reſiduum, æquale numero quantitatum, & ſit numerus quantitatũ F C, erit igitur F B, ęqualis B C, quare B C quantitatis, ad A B rem, ut D C reſidui rei, ductæ in numerum quadratorum, à quantitate ad C F numerum quantitatum, erit etiam ex hoc E B reſiduum, æquale A F reſiduo, quare A B media proportionalis inter A H & B C, diuiſam ſecundum numerũ, ſecundum quem B G continetur in B D. 10



Nota igitur, quod in hac tota regula, res media proportionalis eſt, inter quantitatem diuiſam, per numerum quadratorum, & reſiduum rei & numeri quantitatum. Not^m

REGVLA.

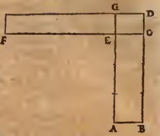
Regula igitur eſt, cū quantitas rei, æqualis fuerit quadratis rei & quantitatibus, & res nota fuerit, ducemus eam in ſe, deinde in numerum quadratorum, & productum diuidemus, per reſiduum rei à numero quantitatum, & quod exit, eſt quantitas. Exemplum, Quan: rei æquatur tribus quadratis rei, & 12 quantitatibus, & ſit res 20, gratia exempli, duco 20 in ſe, fit 400, duco 400 in 3 numerum quadratorum, fit 1200, diuido 1200, per 8, differentiam rei & numeri quantitatum, exit 150, quantitas ipſa. Si uero quantitas ipſa cognita ſit, non res, duc eam in numerum quantitatum, & productum diuide per numerum quadratorum, quod exit, abijce ex quadrato dimidij prouentus quantitatis diuiſæ per numerum quadratorum, & radix reſidui, addita uel detracta, à dimidio eiuſdem prouentus, oſtendit æſtimationem rei. Exemplum, Quantitas rei, æqualis eſt 4 quadratis rei, & 3 quantitatibus, & quantitas ipſa eſt 50, duc 50 in 3 numerum quantitatum, fit 150, diuide 150, per 4 numerum quadratorum, exit $37\frac{1}{2}$, deinde diuide 50, per 4, ſcilicet quantitatem per numerum quadratorum, exit $12\frac{1}{2}$, huius dimidium, quod eſt $6\frac{1}{4}$, duc in ſe, fit $39\frac{1}{16}$, à quo abijce $37\frac{1}{2}$, relinquuntur $1\frac{9}{16}$, cuius radix eſt $1\frac{1}{4}$, quæ addita uel detracta à $6\frac{1}{4}$, oſtendit æſtimationes rei, $7\frac{1}{2}$, uel 5. Si autem productum ſeu quantitas rei cognita ſit, ducemus quantitatē rei in numerū quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, exiēs eſt numerus, qui cū cubo ęquatur tot rebus, quotus eſt numerus qui prouenit diuiſa quantitate rei per numerum quadrator℞. Exemplum, Quantitas rei, quæ ſit 1500, æqualis eſt 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, ducemus igitur 6 in 1500, fit 9000, diuide per 4 numerum quadratorum, exit 2250, numerus, qui cum cubo æquatur 375 rebus, eſt autem 375 numerus, qui prouenit, diuiſo 1500 numero quantitatis rei, per 4 numerum quadratorum, per capitulum autem ſuum, res ualet 10, uel ℞ 300 m: 5, & uterq; iſtorum numerorum, poteſt eſſe rei æſtimatio, in caſu iſto, quando quant^{ta} rei, quæ eſt 1500, æquatur 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, & æſtimatio quantitatis habetur, diuiſo 1500 qui eſt æſtimatio quantitatis rei, per alteram æſtimationem rei.

Quan: rei	Quad. rei	Quan:
1500	4	6
	375	1500
	2250	1000

DEMONSTRATIO.

Cum uero quantitates CD, in numero CF, æquales fuerint quadratis AB rei, & quantitati rei DE, reducendo ad unam quantitatē rei, erit

erit detracta communi ſuperficie D E, ſuperficies G F æqualis A C, quare quadratum A B, per primam ſexti elementorum, æquale ſuperficiei, ex B G in partem E F talem, qualis A B, eſt pars B C, igitur ex 16ª 6ᵗ elementorum, A B media eſt inter D C & partem illam ex E F, unde regula.



REGVLA.

Cum fuerint quantitates, æquales quantitati rei, & quadratis rerum, & fuerit nota res, ducemus eam in ſe, deinde productum in numerum quadratorum, & diuidemus, quod producitur ultimo, per numerum quantitatum, detracta re, & exibit quantitas. Exemplum, 12 quantitates, æquantur quantitati rei, & tribus quadratis rei, & res eſt 4, ducam 4 in ſe, fit 16, ducam 16 in 3, numerum quadratorum rei, fit 48, diuidam 48, per 12 numerum quantitatum, detracto 4 re, & eſt diuidere per 8, exit 6, quantitas ipſa. Si uero quantitas cognita ſit, duc eam in numerum ſuum, & productum diuide per numerum quadratorum rei, ei prouentui adde quadratum dimidij ei us, quod prouenit, diuiſa quantitate per numerum quadratorum, & radix totius, detracto eodem dimidio, eſt æſtimatio rei. Exemplum, 12 quantᵗᵉˢ æquantur quanᵗⁱ rei, & 3 quadratis rei, & quantitas eſt 6, duco 12 in 6, fit 72, diuido per 3 numerum q̃dratorum, fit 24, deinde diuido 6 quantitatẽ, per 3 numerum q̃dratorum, exit 2, cuius dimidium quod eſt 1, duco in ſe fit etiam 1, addo ad 24, fit 25, cuius ℞ 5, detracto 1, dimidio 2, relinquit 4, æſtimationem rei. Si uero quantᵗᵃˢ rei nota ſit, ducemus eam in numerum quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, & quod exit, eſt numerus qui æquatur cubo & rebus, quarum numerus eſt id, quod prouenit diuiſa quantitate rei, per numerum quadratorum, inde ęquatio rei, eſt æſtimatio quæſita, unde diuiſa quanᵗᵉ rei, per æſtimationẽ rei, exibit æquatio quantitatis.

Quad. rei	Quan: rei	Quan:
3	24	12
8	288	
96		

Exemplum, 12 res, æquales ſunt quanᵗⁱ rei, & 3 quad. rei, & quantᵗᵃˢ rei, eſt 24, duco 24 in 12, fit 288, diuido per 3, exit 96, deinde diuido 24 per idem 3, numerum quad. rei, exit 8, igitur cubus p: 8 rebus, æquatur 96, tunc uero per capitulum ſuum, res ualet 4. Ideo 4 eſt rei æſti-

æſtimatio, cum quo diuide 24 quantitatem rei, exit 6 quantitas ipſa.

Not^a. Scias, quòd quodlibet capitulum, ſeu regula ex præcedentibus, habet omnes proprietates contentas in eadem regula, in ſingulis modis, quamuis modo utamur una, modo alia, ſecundum quòd illud quod eſt notum, aliud fit. Exemplum, in decima regula ſunt quinque proprietates. PRIMA, quòd proportio quantitatis ad rem, eſt ut ducta re in numerum quadratorum, & detracta quantitate, ad numerũ quantitatum. SECVNDA, quòd res eſt proportionalis, inter quantitatem diuiſam per numerum quadratorum, & differentiam rei à numero quantitatum. TERTIA, quòd ducta re in ſe, & poſt in numerum quadratorum, ducto quadrato, tantum fit, quantum ex quantitate in reſiduum rei & numeri quantitatum. QVARTA & QVINTA, ſunt reliqui duo modi procedendi illius regulæ, ad inuentionem rei, horum exempla in quæſtionibus ſubiungere libuit.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta, ſint 100, & productum unius in alterum duplum ſit aggregato eorũ. Ponemus primum rem, ſecundum quantitatem, igitur quantitas rei, æqualis eſt 2 rebus, & 2 quantitatibus, quare ex 4^a regula, proportio reſidui rei, ad 2, ut 2 ad reſiduum quantitatis, igitur erunt tres quantitates proportionales, reſiduum rei, 2, & reſiduum quantitatis, res autem conſtat ex ſuo reſiduo & 2, ſed quantitas ex ſuo reſiduo & 2, igitur res eſt aggregatũ primæ & ſecundæ trium quantitatũ proportionalium, & quantitas aggregatum ſecundæ & tertiæ, igitur ex dictis in capitulo trium quantitatum proportionalium, quadratum aggregati primæ & ſecundæ cum quadrato aggregati ſecundæ & tertiæ, & cum quadrato ſecundæ, æquantur quadrato aggregati ipſarum trium quantitatum, at uero quadratum aggregati primæ & ſecundæ & quadratum aggregati ſecundæ & tertiæ ex ſuppoſito faciunt 100, & quadratum ſecundæ eſt 4, quia 2^a quantitas proportionalis fuit 2, igitur quadratum aggregati omnium trium quantitatum eſt 104, igitur tres quantitates ipſæ iunctæ, ſunt R 104, & quia 2ª eſt 2, erunt reliquæ, ſcilicet prima & tertia, R 104 m: 2, fac igitur ex R 104 m: 2, duas partes, producentes 4, quadratum 2, & erunt R 26 m: 1 p: R v: 23 m: R 104, & R 26 m: 1 m: R v: 23, m: R 104, & quia res cõſtat ex prima & ſecunda proportionali, & quãtitas ex 3^a & 2ª ꝓportionali, erit igitur ut addamus 2 utrique parti, ſcilicet ſecundam quantitatẽ, & fiet res R 26 p. 1 p: R v: 23 m: R 104, & quãtitas R 26 p: 1 m: R v: 23 m: R 104, horũ q̃drata iuncta ſunt 100, præciſe, & productum unius in alterum eſt R 416 p: 4,

p:4, duplum aggregati corū, uia uero communi procedēdo, peruenires ad partes has, quas uides infra, liquet autem quòd illæ confuſæ magis ſunt, quamuis ſuperioribus æquiualeant.

℞ 26 p:1 p:℞ v:23 m:℞ 104
℞ 26 p:1 m:℞ v:23 m:℞ 104
℞ vma 50 p:℞ v:2068 m:℞ 26624
℞ vma 50 m:℞ v:2068 m:℞ 26624

Qvæstio II.

Inuenias duos numeros, quorum q̃drata iuncta ſint 100, & quadratum maioris, æquale ſit ductui maioris in minorem quater cum octuplo maioris. Ponemus maiorem rem, minorem quantitatē, eritq́ꝫ quadratum rei, æquale 4 quantitatibus rei & 8 rebus, quare ex 6ª regula, auferemus 8 ex re, & fiet reſiduum res m:8, unde diuiſum per 4 exibit $\frac{1}{4}$ rei m:2, & hæc eſt quantitas quadrata, igitur rei & $\frac{1}{4}$ rei m:2 æqualia ſunt 100, quare 1 $\frac{1}{16}$ quad. p:4 m:1 re, æq̃bitur 100, & quadratum æquabitur $\frac{16}{17}$ rei, & 90 $\frac{6}{17}$, quare res eſt ℞ 90 $\frac{166}{289}$ p: $\frac{8}{17}$, & quantitas eſt $\frac{1}{4}$ huius m:2, ſcilicet ℞ 5 $\frac{191}{289}$ m:1 $\frac{15}{17}$.

Qvæstio III.

Inuenias duos numeros, quorum q̃drata iuncta ſint 100, & productum unius in alterum, æquale ſit triplo quadrati minoris, & ſexcuplo eiuſdem minoris. Ponemus rem minorem numerum, & quantitatem maiorem, igitur quantitas rei, æquatur 3 q̃dratis rei & 6 rebus, quare ex 7ª regula, quantitas eſt 3 res p:6 quadrata, igitur rei & triū rerum p:6 iuncta ſunt 100, igitur 10 quadrata p:36 rebus p:36, æquantur 100, & 1 q̃d. p:3 $\frac{3}{5}$ rei, æquatur 6 $\frac{2}{5}$, res igitur eſt, ℞ 9 $\frac{16}{25}$ m:1 $\frac{4}{5}$, & quantitas triplum huius p:6, id eſt ℞ 86 $\frac{19}{25}$ p: $\frac{3}{5}$.

Qvæstio IIII.

Fac de 20, tres partes proportionales, quarum mediæ quadratū, ęquale ſit duplo producti mediæ in minorem, & quadruplo minoris, poſita media re, & minore quantitate, erit quadratum rei, æquale 2 quantitatibus rei, & 4 quantitatibus. Quare ex notando primo nonę regulæ, res media eſt proportionalis, inter quantitatem & aggregatum ex numero quantitatum 4, ac producto rei in numerum quantitatis rei, ſcilicet 2, tertia igitur quantitas eſt 2 res p:4, quia igit̃ 3ª quantitas eſt 2 res p:4, & 2ª res, & hæ cum prima conſtituunt 10, erit prima 6 m:3 rebus, quare ducta prima in tertiam, fiet quadratum ſecundæ, igitur 1 q̃dratum æq̃tur 24 m: 6 q̃dratis, quare 7 q̃drata ęquantur 24, & res eſt ℞ 3 $\frac{3}{7}$, & hæc eſt media, cuius duplum p:4 eſt tertia, uidelicet 4 p:℞ 13 $\frac{5}{7}$, inde detracto aggregato ſecundę & tertiæ ex 10 relin-

2 rȩs p:4	res	6 m:3 reb⁹
4 p:℞ 13 $\frac{5}{7}$	℞ 3 $\frac{3}{7}$	6 m:℞ 30 $\frac{6}{7}$

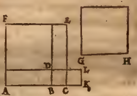
relinquitur prima 6 m:℞ 30$\frac{6}{7}$,hæ autem quantitates proportionales ſunt,& quadratum ſecundæ eſt æquale duplo producti ſecundæ in primam,cum quadruplo primæ,ut proponebatur.

De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.

Scipio Ferreus Bononienſis iam annis ab hinc triginta fermè capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Mariæ Floridò Veneto,qui cū in certamen cū Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando ueniſſet, occaſionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipſe,qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quæſiuimus,eamq́ in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubiecimus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli cauſa cubus G H & ſexcuplum lateris G H æquale 20,& ponam duos cubos A E & C L,quorum differentia ſit 20, ita quod productum A C lateris, in C K latus, ſit 2, tertia ſcilicet numeri rerum pars,& abſcindam C B,æqualem C K,dico, quod ſi ita fuerit,lineam A B reſiduum, eſſe æqualem G H,& ideo rei æſtimationem, nam de G H iam ſupponebatur,quod ita eſſet, perficiam igitur per modum primi ſuppoſiti 6^i capituli huius libri, corpora D A,D C,D E D F,ut per D C intelligamus cubum B C,per D F cubum A B,per D A triplum C B in quadratum A B,per D E triplum A B in quadratū B C. quia igitur ex A C in C K fit 2,ex A C in C K ter, fiet 6 numerus rerum, igitur ex A B in triplum A C in C K fiunt 6 res A B, ſeu ſexcuplum A B,quare triplum producti ex A B, B C,A C, eſt ſexcuplum A B,at uero differentia cubi A C, à cubo C K, & exiſtenti à cubo B C ei æq̄le ex ſuppoſito,eſt 20,& ex ſuppoſito primo 6^i capituli, eſt aggregatum corporum D A,D E,D F,tria igitur hæc corpora ſunt 20, poſita uero B C m:cubus A B,æqualis eſt cubo A C,& triplo A C in quadratum C B,& cubo B C m:& triplo B C in quadratum A C m: per demonſtrata illic,differentia autem tripli B C in quadratum A C, à triplo A C in quadratum B C eſt productum A B,B C,A C,quare cum hoc,ut demonſtratum eſt,æquale ſit ſexcuplo A B, igitur addito ſexcuplo A B, ad id quod fit ex A C in quadratum B C ter,fiet triplum B C in quadratum A C,cum igitur B C ſit m:iam oſtenſum eſt,quod productum C B



in quadratum A C ter, eſt m: & reliquum quod ei æquatur eſt p: igitur triplum C B in q̄dratum A B, & triplum A C in q̄dratū C B, & ſexcuplū A B nihil faciunt. Tanta igitur eſt differentia, ex cōmuni animi ſententiā, ipſius cubi A C, à cubo B C, quantum eſt quod cōflatur ex cubo A C, & triplo A C in quadratum C B, & triplo C B in quadratum A C m: & cubo B C m: & ſexcuplo A B, hoc igitur eſt 20, quia differentia cubi A C, à cubo C B, fuit 20, quare per ſecundum ſuppoſitum 6[i] capituli, poſita B C m: cubus A B æquabitur cubo A C, & triplo A C in quadratum B C, & cubo B C m: & triplo B C in quadratum A C m: cubus igitur A B, cum ſexcuplo A B, per communem animi ſententiam, cum æquetur cubo A C & triplo A C in quadratum C B, & triplo C B in quadratum A B m: & cubo C B m: & ſexcuplo A B, quæ iam æquatur 20, ut probatum eſt, æquabuntur etiam 20, cum igitur cubus A B & ſexcuplum A B æquentur 20, & cubus G H, cum ſexcuplo G H æquentur 20, erit ex communi animi ſententia, & ex dictis, in 35[a] p[i] & 31[a] undecimi elementorum, G H æqualis A B, igitur G H eſt differentia A C & C B, ſunt autem A C & C B, uel A C & C K, numeri ſeu liniæ continentes ſuperficiem, æqualem tertiæ parti numeri rerum, quarum cubi differunt in numero æquationis, quare habebimus regulam.

Regula.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, ſcilicet quadratam, quam ſeminabis, uniq; dimidium numeri quod iam in ſe duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum ſua Apotome, inde detracta R̶ cubica Apotomæ ex R̶ cubica ſui Binomij, reſiduū quod ex hoc relinquitur, eſt rei æſtimatio.

Exemplum. cubus & 6 poſitiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in ſe, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ eſt R̶ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiū R̶ 108 p: 10, & Apotomen R̶ 108 m: 10, horum accipe R̶[ta] cub[ā] & minue illam quę eſt Apotomæ, ab ea quæ eſt Binomij, habebis rei æſtimationem, R̶ v: cub: R̶ 108 p: 10 m: R̶ v: cubica R̶ 108 m: 10.

cub[9] p: 6 reb[9] æq̄lis 20
2 20
8 —— 10
108
R̶ 108 p: 10
R̶ 108 m: 10
R̶ v: cu. R̶ 108 p: 10
m: R̶ v: cu. R̶ 108 m: 10

Aliud, cubus p: 3 rebus æquetur 10, duc 1, tertiam partem 3, ad cubum, fit 1, duc 5, dimidium 10, ad quadratum, fit 25, iunge 25 & 1,

H 2 fiunt

fiunt 26,huius radici adde 5,& ab ea minue 5,habebis Binomium ℞ 26 p: 5,& Apotomen ℞ 26 m: 5,igitur rei æſtimatio eſt ℞ v: cubica ℞ 26 p: 5 m: ℞ v: cubica ℞ 26 m: 5,experientia ſic habetur.

RA: v: cubica RA: 26 p: 5 m: RA: v: cubica RA: 26 m: 5
cubi partium RA: 26 p: 5 m: RA: 26 m: 5
hoc autem totum,ut liquet,eſt 10
Quad: partiū, RA: v: cubica 51 p: ℞: 2600 ℞ v: cuª 51 m: ℞ 2600
triplicata q̄drata partium, ℞ v: cub: 1377 p: ℞ 1895400
RA: v: cubica 1377 m: ℞ 1895400 partes ipſæ
m: RA: v: cubica ℞ 26 m: 5. p: RA: v: cubica ℞ 26 p: 5

Producta partium in triplata quadratorum

p: RA: v: cubica 49299354 p: 6885 m: RA: 47385000 m: 7020
m: RA: v: cubica 49299354 m: 6885 m: RA: 47385000 p: 7020

Porro hæ RA: cubicæ quatuor nominibus conſtantes,ad duas reduci poſſunt,cum enim 6885 dempſeris ex 7020,relinquetur 135, detracta etiam radice 47385000,ex radice 49299354, relinquitur RA: 18954, igitur talia producta erunt RA: v: cubica RA: 18954 m: 135 m: RA: v: cubica RA: 18954,p: 135,cubus igitur totus, ex demonſtratis in 3° libro eſt 10 p: RA: v: cubica RA: 18954 m: 135 m: RA: v: cubica RA: 18954 p: 135,at uero tres radices ſeu res ſunt
RA: v: cubica RA: 18954 p: 135 m: RA: v: cubica RA: 18954 m: 135.

Iunctis igitur omnibus ſimul,cum radices illæ uniuerſales cubicæ mutuo ſe deleant , fiet aggregatum cubi & trium rerum, 10, ad unguem.

Exemplum tertium, cubus & 6 res æquantur 2 , duc 2 , tertiam partem numeri rerum,ad cubum fit 8,duc 1 dimidium 2,ad quadratum fit 1 ,iunge 8 & 1 ,fiunt 9,huius radix eſt 3, ergo geminatæ 3,alteri adde 1 dimidium numeri,fiet 4,ab altero minue 1 , ſimiliter dimidium reliquum numeri,fit 2,minue igitur RA: cubi minoris ex maiore,habebis æſtimationem rei,RA: cubicam 4 m: RA: cubica 2.

Memento autem eius,quòd in capitulo de educenda cubica radice in libro tertio dixeramus,quandoq; radices illas uniuerſales cubicas,numero integro,uel fracto æquipollere,ut in primo exemplo docuimus,nam RA: v: cubica RA: 108 p: 10 m: RA: v: cubica RA: 108 m: 10,eſt 2 ut ibi ex regula patet , & ut experimento etiam notiſsimum eſt.

De

De cubo æquali rebus & numero. Cap. XII.

Demonstratio.

Sit etiam cubus æqualis rebus & numero, & ſint duo cubi D C & D F, quorum latera A B & B C, producāt tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipſi cubi iuncti æquales illi numero, dico A C eſſe rei quęſitæ æſtimationē, cum enim ex A B, in B C, fiat tertia pars numeri rerum, ex A B in B C ter, fiet numerus rerū, & ex A C in productum ex A B in B C ter, fient res ipſæ, poſita A C re, at ex A C in productum A B in B C ter, fiunt ſex corpora, quorum tria ſunt ex A B in quadratum B C, alia tria ex B C in quadratum A B, hæc igitur ſex corpora, æqualia ſunt rebus, ipſa uero cum cubis D C & D F, ex primo ſuppoſito capituli ſexti conſtituunt cubum A E, cubi etiam D C & D F, æquiualent numero propoſito, igitur cubus A E, æqualis eſt rebus & numero propoſitis, quod erat demonſtrandum,



ſupereſt oſtendere, quod triplum A C in productum A B in B C, ſit æquale ſex corporibus, id oſtendā, ſi probauero ex A B, in B C ducto in A C, fieri duo corpora ex A B in quadratum B C, & ex B C in quadratū A B, nam quod fit ex A C in productum A B in B C, æquale eſt ei, quod fit ex A B in ſuperficiem B E, latera enim omnia omnibus ſunt æqualia, ſed hoc æquale eſt ei, quod fit ex A B in C D & D E, quod autem fit ex A B in D E, æquale eſt ei, quod fit ex C B in quadratum A B, quoniam latera omnia omnibus ſunt ęqualia, quod igitur ex A C, in productum A B in B C fit, æquale eſt his, quæ fiunt ex A B in quadratum B C & ex B C in quadratum A B, quod eſt propoſitum.

Regula.

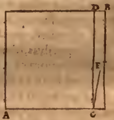
Regula igitur eſt, cum cubus tertiæ partis numeri rerum, maior non fuerit quadrato dimidij numeri æquationis, auferes ipſum ex eodem, & reſidui radicem, adde dimidio numeri æquationis, atq; iterum minue ab eodem dimidio, habebisq; ut dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum ℞ cubicæ iunctæ rem ipſam conſtituunt. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p:40, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum, fit 8, aufer ex 400, quadrato 20, dimidij numeri, fit 392, huius radicē adijce ad 20, fit 20, p:℞ 392, detrahe etiam ab eodem, fit 20 m. ℞ 392, horum ℞ cubicæ iunctæ, faciunt rei æſtimationem,

nem, ℞ v: cubicam 20 p: ℞ 392 p: ℞ v: cubica 20 m: ℞ 392. Aliud, cubus ęquatur 6 rebus p: 6, tertiam partem numeri rerum, quę eſt 2, ad cubum, ducito, fit 8, detrahe ex 9 quadrato dimidij 6 numeri ęquationis, relinquitur 1, cuius ℞ eſt 1, hanc adde & minue à 3, dimidio numeri, fiunt partes, 4 & 2, quarum ℞ cubicæ iunctę, faciunt ℞ cubicam 4 p: ℞ cubica 2, æſtimationem rei.

At ubi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quandocunque numerus æquationis eſt minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, uel ubi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in ℞ $\frac{1}{3}$ eiuſdem numeri maior numerus numero ęquationis, tunc hoc diſſoluitur per quæſtionem Alizam, de qua in libro de quæſtionibus Geometricis dictum eſt, ſed ſi libet tantam effugere difficultatem, plerunque capitulum 25^{m} huius tibi ſatisfaciet.

De cubo & numero æqualibus rebus. Cap. XIII.

DEMONSTRATIO.



HOc capitulum ex præcedenti trahitur, ſit igitur cubus G H, æqualis rebus A B, quæ deſcribuntur quadrata ſuperficie & numero F, & ſit baſis cubi G H, quadratū G K, cuius pars quarta ſit H L, reſiduum autem æquale A D ſuperficiei, latus autem, quod Græce tetragonicum uocant, reſidui C D ſit C E, ſit uero M K dimidium H K, à qua abſcindatur M N, æqualis C E, dico quod tam H N, quā N K, cubi, cum numero F, æquantur rebus A B, ut numerus rerū & ęquationis idem maneat, & primo oſtendamus de H N, conſtat enim cubū H N continere latus ſuum, H N in quadrato H N, quadratum autem A B (quia G L æqualis eſt A D, & G L triplum eſt quadrati H M) æquale eſt triplo q̄drati H M, & quadrato M N, hæc autem ſuperant, ex 4^{a} 2^{i} elementorum, quadratum H N, in duplo H M in N K, quare in eo quod fit ex H K in N K, quia H K dupla eſt ad H M, cubus igitur H N, cōtinet latus ſuum



F........ numerus.

HN

F N in ſuperficie A B minus eo,quod fit ex H K in K N. At uero,quia cubus G K continebat res ſeu latera H K in quadrato H K,uel in quadrato A B,cum numero F,igitur ex communi animi ſententia, F numerus æqualis eſt,producto ex H K in differentiam q̃dratorum A B & G K, at differentia G K & A B eſt,quanta differentia H L & C B,quia A D eſt æqualis G L differentia autem H L & C B eſt,ut quadrati H M & M N,igitur ex differentia quadrati H M,& M N in H K,fit F numerus,at uero ex 4ª 2ⁱ elementorum,differentia quadratorum H M, ſeu M K,& M N , eſt duplum M N in N K,cum quadrato N K,& ideo M N & M K in N K, & ideo H N in N K,igitur ex H K in productum H N in N K fit F numerus, addatur igitur F numerus,cubo H N, & ex alia parte productum ex H K in K N ductum in H N producto ex H N in ſuperficiem A B , minus producto H K in K N,fiet cubus H N cum numero æqualis H N ductæ in A B,ſeu rebus ex A B,quod erat probandum. Similiter , quia differentia G K & A B,quæ eſt H N in K N,ducta in K H,producit F, differentia etiam A B & quadrati K N (cum A B ſit ęqualis quadratis H M & M K & M N,& ductui K M in M H) æqualis eſt differentiæ dupli K H in H N à quadrato N H,addito ei rectangulo H N in N K, at quod fit ex H N in N K cum quadrato N H,æquale eſt producto ex K H in H N, per 3ᵃᵐ 2ⁱ elementorum,igitur quadratum A B ſuperat quadratum N K in producto K H in H N ſemel,cum igitur numerus F,contineat N K in producto K H in H N,& cubus K N contineat K N in quadrato K N, erit, ut cubus K N cum numero F,ſeu cum producto ex K N in rectangulum K H in H N,æqualis producto A B in K N,igitur cubus K N cum eodem numero F,æqualis eſt A B numero rerum eidem. Ex hac demonſtratione patet,quod æquatio cubi æqualis rebus & numero,æqualis eſt ambabus æquationibus cubi & eiuſdem numeri æqualium totidem rebus, ſimul iunctis,uelut ſi cubus æqualis ſit 10 rebus & 12,& æquatio ſit ℞ 7 p: 1 ,æquationes cubi p: 12,æqualium 10 rebus quæ ſunt 2 & ℞ 7 m: 1 ,ſimul iunctæ,facient ℞ 7 p: 1 .

Regula.

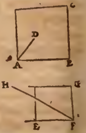
Regula igitur eſt,cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus,inuenies æſtimationem cubi æqualis totidem rebus , & eidem numero, cuius dimidium in ſe ducito & triplicato, hoc abijce ex numero rerũ, & ℞ reſidui,addita dimidio æſtimationis cubi æqualis rebus & numero,uel detracta,oſtendit æſtimationem cubi & numeri æqualium rebus. Exemplum,cubus p: 3,æquatur 8 poſitionibus , tunc inuenio æſtimationem cubi æqualis 8 rebus p: 3,ex præcedenti capitulo,& eſt etiam 3,huius dimidium duco in ſe, fit $2\frac{1}{4}$,triplica,fit $6\frac{3}{4}$, abijce ex 8

rerum

rerum numero, ſit reſiduum $1\frac{1}{4}$, cuius ℞ addita uel detracta ab $1\frac{1}{2}$ dimidio æſtimationis cubi æqualis rebus & numero, oſtendit utraſq; æſtimationes quæſitas alteram $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$, reliquam $1\frac{1}{2}$ m: ℞ $1\frac{1}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Nunc etiam oſtendamus, quomodo una æſtimatione habita, abſq; auxilio præcedentis capituli habeatur & reliqua, & ſit, ut ex A D in A C quadratum fiat numerus æquationis, ita quod quadrata A D & A C iuncta, faciant numerum rerum, eritq; ex 8° capitulo, A D, rei æſtimatio, & ſit F H linea, cui ſi adderetur dimidium A D quadratum totius, æquale foret quadrato A C & quadrato dimidij A D, dico F H eſſe reliquam æſtimationem, quando cubus cum numero ex A D in A C æqualis eſt rebus in quadrato A C, & quadrato A D, fiat quadratum E G, quod cum quadrato F H æquale ſit quadratis A C & A D, iunctis, quia igitur quadratum compoſitę ex F H & dimidio A D, æquale eſt quadratis C A & dimidij A D, erit ex 4^a 2^i elementorum abiecto communi quadrato dimidij A D, quadratum A C æquale quadrato F H, & duplo F H in dimidium A D, quare rectangulo ex F H in A D ſemel cum quadrato F H, quare ex 16^a 6^i elementorum A B proportionalis inter F H & aggregatum F H & A D, quia uero quadratum E G, additum producto F H in ſe, & in A D, tantum facit, quantum additum, quadrato A C, E G uero, & F H quadratum, æqualia ſunt quadratis A D & A C, ex ſuppoſito, erit quadratum A C & quadratum A D & productum F H in A D, æquale quadratis A C & E G, inde abiecto communiter A C quadrato, erit E G quadratum, æquale ei quod fit ex F H in A D cum quadrato A D, ex 16^a igitur 6^i, E F proportionalis eſt inter A D & aggregatum ex A D & H F, cumq; ſimiliter, ut oſtenſum eſt, A B ſit proportionalis inter F H & aggregatum F H & A D, erit ex 34^a 5^i noſtri ſuper Euclidem, quia F H & A D iunctæ in utroq; ordine ſunt prima quantitas, proportio F H, ad A D, ut A B ad E F duplicata, quare ex 17^a 6^i elementorum, F H ad A D, ut A C ad E G, igitur ex 34^a 11^i elementorum, corpus quod ſub F H & E G continetur, æquale eſt corpori ſub A D & A C, quare & numero æquationis, cumq; quadrata E G & H F, æquentur numero rerum, quia quadratis A C & A D, erit ex 8° capitulo huius, H F etiam æſtimatio rei, in eodem capitulo. unde regula.



REGVLA.

Duc dimidium primæ æſtimationis in ſe, & triplica, & aufer à numero rerum, & ℞ reſidui, detracto dimidio prioris æſtimationis, eſt

æquatio

æquatio quæſita. Exemplum, cubus & 6o, æquatur 46 rebus, & altera æquationum eſt 6, pro habenda reliqua duc 3, dimidium prioris æſtimationis in ſe, fit 9, hunc triplica fit 27, abijce 27 ex 46, relinquitur 19, ab huius radice abijce 3, dimidium primæ æſtimationis, habebis ſecundam æſtimationem, ℞ 19 m: 3, & eadem ratione cum hac in uenires primam æſtimationem, ſcilicet cum ℞ 19 m: 3, eodem modo ipſum 6.

De cubo æquali quadratis & numero. Cap. XIIII.

Quod ſi cubus, æqualis ſit quadratis & numero, conuertetur capitulum in cubum æqualem rebus & numero, primo conuerſionis modo, qui eſt à toto ad partem, nam ſecundus eſt à parte ad totum, tertius à differentia partiũ, quartus à proportione.

Demonstratio.

Sit igitur cubus A E, in capituli 12 figura, æqualis 6 quadratis A C, & 100, cumq́ quadratum A C, conſtet ex quadrato A B, & gnomone cum circundante, erit cubus A C æqualis quadratis 6 A B, & gnomonibus 6 & 100, gnomo autem conſtat quadrato B C, & duplo A B, in B C, igitur cubus A C conſtat 6 quadratis A B & 6 quadratis B C & 6 productis A B, in B C bis, & 100, at ex A B in B C bis, fiunt 4 res, quia A B eſt res, & B C, 2, & 6 quadrata B C, ſunt triplum cubi B C, quia B C eſt tertia pars 6, igitur cubus A C, æqualis eſt 6 quadratis A B, & 24 rebus, & triplo cubi B C, & 100, at conſtat, quòd 24 numerus rerum, cõſtat ex 6 numero quadratorum, in 4, qui eſt duplum tertiæ partis eiuſdem numeri. At ex alia parte cõſtat etiam, cubus A C, cubis A B & B C, & triplo A B in quadratũ B C, & triplo B C in quadratũ A B, hoc namq́ in primo ſuppoſito 6[i] capituli oſtenſum eſt, igitur cubus A C, æqualis eſt cubis A B & B C & 6 quadratis & 12 rebus, igitur cubus A B, & cubus B C, & 6 quadrati, & 12 res, æquantur 6 quadratis & 24 rebus, & triplo cubi B C & 100, conſtat autem, quod numerus quadratorũ manet idem, quia eſt triplus ad B C, & B C fuit tertia pars numeri quadratorum, & numerus rerum eſt ex numero quadratorum in ſuam partem tertiam, hoc enim æquale eſt ſemper, triplo quadrati tertiæ partis, abiectis igitur cõmuniter cubo B C ſemel, & 6 quadratis, & 12 rebus ſcilicet tot rebus, quot fiunt ex numero quadratorum in ſuam ter tiam partem, relinquetur cubus A B, æqualis 100, & 12 rebus, & duplo cubi B C, manifeſtum eſt autem, quod numerus 100, manet idem,

& quod numerus rerum ſit ex numero quadratorum in tertiam ſui partem,& quod duplum cubi B C,eſt 16, quia B C eſt 2,igitur cubus A B æqualis eſt 12 rebus,& 116 numero,ideo ex pręcedenti capitulo, inuenta A B,addemus ei B C,tertiam partem numeri quadratorum, & conflabitur A C,& quia in quęrendo A B,reducimus tertiam partē numeri rerum ad cubum,& hæc tertia pars numeri rerum,eſt quadratū tertiæ partis numeri quadratorum, ideo ex ultima contractione ſit hæc regula.

REGVLA.

Adde cubum tertiæ partis numeri quadratorum,dimidio numeri æquationis,& totum quod inde fit,in ſe ducito, à quadrato abijce cubum quadrati tertiæ partis numeri quadratorum, reſidui radicem adde & minue dimidio aggregati,quod in ſe duxeras, habebis Binomium & Apotomen,cuius ℞ cubicam iunge,& eis adde tertiam partem numeri quadratorum,& totum quod conflatur,eſt rei ęſtimatio. Exemplum,cubus æquatur 6 quadratis p: 20,adde 8, cubum 2, tertiæ partis 6,ad 10,dimidium 20,fit 18,ab huius quadrato 324,abijce 64,cubum quadrati 2,relinquitur 260,cuius radicem adde & minue à 18,habebis 18 p:℞ 260,& 18 m:℞ 260,horum ℞ cubicæ iunctæ,addita tertia parte numeri quadratorum,conſtituunt rem.

De cubo & quadratis æqualibus numero. Cap. XV.

DEMONSTRATIO.

HOc capitulum conuertitur ſecundo modo,differentia autē eſt,quod primus modus oſtendit addendam tertiam partem numeri quadratorum,& ſecundus minuendam,ſit igitur,in figura 12 capituli,cubus A B cum 6 quadratis A B, æqualis 100,& ponatur B C tertia pars numeri quadratorum, & compleatur cubus A C,erit igitur cubus A C æqualis cubo A B,& 6 quadratis,& 12 rebus,& cubo B C,ex primo ſuppoſito 6 capituli,loco igitur cubi A B & 6 quadratorum ponatur 100,nam illa erant æqualia 100, igitur cubus A C,æqualis erit 12 rebus,& cubo B C,& 100, at 12 res ex A B,deficiunt à 12 rebus ex A C in 12 B C,at illud 12,ut oſtenſum eſt in præcedenti,fit ex triplo quadrati B C,igitur 12 B C,eſt triplum cubi B C,igitur cubus A C & triplum cubi B C æquantur 12 rebus, & cubo B C,& 100,abiecto igitur cubo B C communi ſemel,erit cubus A B cū duplo cubi B C,æqualis 12 rebus,& 100, duplum autem cubi B C eſt 16,& numerus rerum eſt triplum quadrati B C, tertiæ partis numeri qua-

quadratorum,& ideo inuenta æſtimatione A C, abijciemus B C tertiam partem numeri quadratorum,& relinquetur A B cognita, ſecundum hoc erit regula.

Regvla.

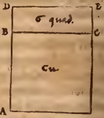
Duc tertiam partem numeri quadratorum,ad cubum, & duplica illum cubū,& differentiam numero æq̃tionis ab eo ſume,inde triplica quadratum tertiæ partis numeri quadratorum,& habebis res,quæ æquantur cubo & numero,ſi duplum cubi fuit maius numero æquationis,uel res cum numero,æquales cubo, ſi duplum cubi minus ſit numero æquationis,uel res æquales cubo, ubi differentia numerorum nulla ſit,inde inuenta æquatione,minue ab ea tertiam partem numeri quadratorum,& reſiduum eſt rei æſtimatio. Exemplum. Cubus & 6 quadrata æquantur 100,duc 2 ad cubum fit 8,duplica fit 16,abijce ex 100 habebis cubum, æqualem 84 p: 12 rebus, ſunt autē 12 res, triplum quadrati 2,tertiæ partis 6, numeri quadratorum, res igitur eſt,ex capitulo 12. ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700,ab hoc abijce 2,tertiā partem 6 erit rei æſtimatio quæſita, quando cubus & 6 quadrata æquantur 100,hæc, ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700 m: 2. Rurſus, ſit cubus & 6 quadrata, æqualia 25,& abijcio 16 duplum cubi tertiæ partis 6, ex 25, fient 9, & 12 res, ut prius, æquales cubo, res igitur ualet ℞ 5 $\frac{1}{5}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, abijce 2 relinquitur æſtimatio quæſita, ℞ 5 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$. Rurſus, cubus & 6 quadrata æquantur 16,abijce duplum cubi 2,ſcilicet 16,ex 16 numero relinquitur nihil,deinde ſume triplum quadrati & eiuſdem tertię partis numeri quadratorum,& eſt 12,numerus rerum,æqualium cubo,quare quadratum æquatur 12,quare res eſt ℞ 12,abijce 2 tertiam partem 6 relinquitur rei æſtimatio, ℞ 12 m: 2. Rurſus, cubus & 6 quadrata, æquentur 7,ſume differentiam 7 & 16,dupli cubi 2,& eſt 9,& quia duplum cuborum eſt maius numero æquationis, & numerus rerum eſt 12,ut prius, habebimus cubū p: 9,æqualem 12 rebus, ideo res ualet 3,uel ℞ 5 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$,abijce 2, erit æſtimatio cubi & 6 quadratorum 1, uel ℞ 5 $\frac{1}{4}$ m: 3 $\frac{1}{2}$ & hoc eſt in re m: quia 3 $\frac{1}{2}$ m: maius eſt quàm ℞ 5 $\frac{1}{4}$, & 6 quadrata ſunt 105 m: ℞ 9261,cubus uero eſt ℞ 9261 m: 98, ſi igitur iungantur cubus & 6 quadrata, fient 7 præciſe, ut patet.

Ex hoc eſt manifeſtum, cur capitulum, cubi & numeri æqualium Corⁿ
quadratis,non demonſtratur ex capitulo cubi & quadratorum æqualium numero. Quemadmodum capitulum cubi & numeri, æqualium rebus, demonſtratum eſt ex capitulo cubi æqualis rebus & numero. Nam cum capitulum hoc perueniat aliquando ad capitulum cubi &

numeri æqualium rebus, melius eſt igitur ducere capitulum cubi & numeri æqualium quadratis, immediate ad capitulum cubi & numeri æqualium rebus, quàm ad idem capitulum, medio capituli cubi & quadratorum æqualium numero, nam & operatio longior, & demonſtratio magis confuſa euaderet.

DEMONSTRATIO.

Demonſtratio alia Ludouici, ſimilis noſtræ uniuerſali, capituli 7ⁱ, & fuit inuēta hæc à Ludouico de Ferrarijs. Sit cubus A C & 6 quadrata, gratia exempli, C D æqualia 100, quia igitur B D, eſt altitudo 6 quadratorum, erit B D 6, poſita igitur A D quadrato aliquo, erit A B quadratum m: 6, A C igitur ſuperficies eſt 1 q̄d'q̄ d^is p: 36, m: 12 quadratis, & hæc eſt baſis corporis A E, quare corpus A E eſt 1 cu'q̄d^m p: 36 q̄dratis m: 12 q̄d'q̄dratis, & hoc eſt æquale 100, igitur 10, radix 100, æquatur 1 cub. 6 co: radici 1 cu' q̄drati p: 36 q̄dratis, m: 12 q̄d'q̄dratis, æſtimatio igitur rei eſt cognita, qua in ſe ducta, quia A D poſita eſt 1 quadratum, habebitur A D, à qua detracta B D, quæ fuit 6, relinquetur A B, quæſita res.



REGVLA.

Regula igitur eſt, pone numerum quadratorum, numerum rerum, quæ cum ℞ numeri propoſiti æquantur cubo, & inuentā æſtimationē in ſe ducito, à qua abijce productione numerum quadratorum ſeu rerum, reſiduum eſt rei æſtimatio. Exemplum, cubus & 6 quadrata æquentur 40, dices igitur, cubus æquatur 6 rebus & ℞ 40, æſtimatio rei, eſt ex ſuo capitulo, ℞ v: cubica ℞ 10 p: ℞ 2 p: ℞ v: cubica ℞ 10 m: ℞ 2, hanc in ſe ducito producetur ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cubica 12, m: ℞ 80 p: 4, abijce 6 numerum rerum, relinquetur æſtimatio quæſita, ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cub. 12 m: ℞ 80 m: 2. Idem in-
Exm uenies ex prima regula operatiōis, Probatio eſt, ut in exemplo, cubus & quadrata 3, æquentur 21, æſtimatio ex his regulis eſt, ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ p: ℞ $89\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ m: ℞ $89\frac{1}{4}$ m: 1, cubus igitur eſt hic conſtans ex ſeptem partibus.

12 m: ℞ v: cubica, $4846\frac{1}{2}$ p: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cubica $4846\frac{1}{2}$ m: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $2119776950\frac{7}{8}$ m: ℞ $2096289117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$
p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$ m: ℞ $2096289117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2119776950\frac{7}{8}$ p: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$

Tria

Tria autem quadrata ſunt ex ſeptem partibus hoc modo
9 p:℞ v:cub. 4846 $\frac{1}{2}$, p: ℞ 23487833 $\frac{1}{4}$, p:℞ v: cub:4846 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 23487833 $\frac{1}{4}$ m:℞ v:cub. 256 $\frac{1}{2}$ p:℞ 65063 $\frac{1}{4}$ m:℞ v: 256 $\frac{1}{2}$ m:℞ 65063 $\frac{1}{4}$ m:℞ v: cub. 256 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 65063 $\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cub. 256 $\frac{1}{2}$ m:℞ 65063 $\frac{1}{4}$.
Inde iunctis tribus quadratis cum cubo ſex partes, quæ ſunt ℞ v:cubicæ æquales p:cũ m: cadunt & relinquitur 21 adamuſsim aggregatũ.

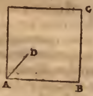
De cubo ac numero æqualibus quadratis. Cap. XVI.

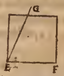
Regula.

Hoc capitulum per ſe patet, ex demonſtratione 7[a] capituli, regula eſt, duc ℞ cubicam numeri, in numerum quadratorum, producetur numerus rerum æqualiũ cubo, & eidem numero, inuentis autem æſtimationibus, duc ℞ cubicam numeri in ſe, & productum diuide per quamlibet æſtimationem inuentã, exibit æſtimatio quæſita utraq;. Exemplum, 1 cubus p:64, æquetur 18 quadratis, duc 18 in 4 ℞ cubicam 64, fit 72, numerus rerũ æqualium cubo p:64, huius æſtimationes ſunt ex capitulo ſuo, 8 & ℞ 24 m:4, cum quibus diuide 16, quadratum 4, ℞ cubicæ 64, exit 2, & ℞ 96 p:8, & hæ ſunt æſtimationes.

Demonstratio.

Et ſit una æſtimationum habita A B, uolo habere reliquam, facio quadratum A B, quod ſit A C, & detraho A B ex numero quadratorum & relinquatur A D, & ducatur A D, in aggregatũ ex A B, & quarta parte A D, & ſuperficiei productæ ſumatur latus quod in eam poteſt, & ei addatur dimidium A D, & fiat E F, quam dico eſſe ſecundam æſtimationem, fiat quadratum E F, & ſumatur E G, quæ cũ E F iuncta, æq̃lis ſit aggregato A B & A D. Quia igitur E F quadratum, æquale eſt producto ex tetragonali in ſe, & dimidio A D in ſe, & producto tetragonalis in A D ex 4[a] 2[i] elementorum, erit quadratum E F, æquale producto A D in aggregatum ex A B, & dimidio A D, & tetragonali ex 16[a] 6[i] elementorum, igitur E F media inter A D & aggregatum A B & tetragonalis & dimidio A D, dimidium autem A D & tetragonalis conſtituunt E F, ex ſuppoſito, E F igitur proportionalis eſt, iter A D & ag-





gregatum A B & E F. Rurſus, quod fit ex A B & A D, in A B & E F, æquale eſt ei quod fit ex E F & E G, in aggregatū A B & E F, quia ex ſuppoſito E F, & E G, æquantur A B, & A D & A B & E F manent idē, quod autem fit ex A D in A B & E F, ex probatis, æquale eſt quadrato E F, igitur quod fit ex A B in A B & E F, cum quadrato E F, æquale eſt ei quod fit ex E F & E G in E F & A B, abiecto igitur communi quadrato E F, erit quod fit ex A B in aggregatum A B & E F, æquale producto A B & E F in E G, cum eo quod fit ex E F in A B, detracto igitur communi iterum producto, A B in E F, relinquetur quadratum A B, æquale producto ex A B & E F in E G, quare A B media inter E G & aggregatum A B & E F, fuerat uero, ut dictum eſt, E F media, inter A D & aggregatum A B & E F, ſunt igitur tres quantitates proportionales, in duobus ordinibus, quarum prima in utroque ordine eadem eſt, uidelicet aggregatum A B & E F, igitur ex 34^{a} 5^{i} noſtri ſuper Euclidē, E G ad A D, ut A B ad E F duplicata, quare ex 17^{a} 6^{i} elementorum, E G ad A D, ut A C ad quadratū E F, igitur ex 34^{a} 11^{i} elementorum, corpus quod ex A D in A C, æquale eſt corpori ex E G in quadratum E F, ſed A B fuit æſtimatio rei igitur corpus quod ex A D in A C æquale eſt numero æquationis poſito aggregato A D & A B numero quadratorum, per demonſtrationem habitam in capitulo 8°, igitur productum ex E G in quadratum E F, eſt æquale numero æquationis, cum igitur E F & E G, ſint æquales numero quadratorum, quia aggregato A B & A D, & ex G E in quadratum E F, fiat numerus æquationis, erit per 8^{m} capitulum, E F rei æſtimatio, quod erat probandum.

A B & E F	
A B	E F
E G	A D

Regula.

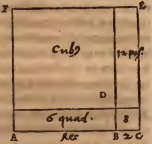
Regula igitur eſt, minue primam æſtimationem à numero quadratorum, & reſiduum duc in aggregatum ex prima æſtimatione, & quarta parte eiuſdem reſidui, & producti accipe radicem, cui adde dimidium eiuſdem reſidui, aggregatum eſt æſtimatio rei quæſita. Exemplum, ſit cubus cum 24 æqualis 8 quadratis, & æſtimatio cognita 2, abijcio 2 ex 8, numero quadratorum relinquitur 6, hoc duc in $3\frac{1}{2}$, quod conſtat ex 2, prima æſtimatione, & $1\frac{1}{2}$ quarta parte 6 reſidui, fit 21, cuius radici adde dimidium primæ æſtimationis, quod eſt 1, fit ℞ 21 p: 1, æſtimatio quæſita.

De cubo, quadratis & poſitionibus æqualibus numero. Cap. XVII.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sit gratia exempli cubus A B,& 6 quadrata,& 20 poſitiones æqualia 100,& addam B C ad A B,quæ ſit 2,tertia pars numeri quadratorum,& deſcribitur cubus uniuerſalis A C, ſecundum quod componitur ex ſuis octo partibus , erit igitur cubus A B, F D ſuperficies cum ſua altitudine, & cubus B C 8 , quia B C eſt 2,& A D corpora , 6 quadratis A B , æqualia , & corpora de 12 A B ſeu duodecuplo A B ex ſexto capitulo huius libri , quia igitur cubus A B & 6 quadrata & 20 poſitiones , æquantur 100 , addantur 8 poſitiones, quæ ſunt reliquum ad 20 poſitiones , cubo A C, qui iam ęquebatur cubo A B,& 6 quadratis,& 12 poſitionibus,& cubo B C, erit cubus A C cum 8 poſitionibus, æq̃lis 108, nam cubus A C excedit tria corpora D A,D E,D F,in cubo C D, qui eſt 8,at quia 8 poſitiones A B deficiũt A B , 8 poſitionibus A C cubi maioris, in 8 B C ſeu octuplo B C,quæ eſt 2,addemus igitur octuplum B C utriq; parti,& fiet cubus p:8 rebus,ęqualis 124



nota igitur ex capitulo ſuo A C,auferemus B C, relinquitur A B. Sit rurſus cubus A B,& 6 quadrata & 12 res,æqualia 100,igitur addito cõmuni cubo B C,erit cubus A C ęqualis 108,& A C ℞ cubicę 108,& A B 2 m:quàm A C cognita,ſit denuo cubus & 6 quadrata A B & 2 poſitiones æqualia 100,additis igitur 10 poſitionibus reſiduis,ad complendum corpora D E,& addito cubo B C,fiet cubus A C æqualis 10 poſitionibus ſuperadditis,& 108,ſed 10 poſitiones A B deficiunt à 10 poſitionibus A C in 10 B C,addemus igitur 10 B C utriq; parti, fiet cubus A C p:20,æqualis 10 poſitionibus p:108,abijce 20 ex utraq; parte, relinquetur cubus A C æqualis 10 poſitionibus p:88,inuenta A C ,minue B C & relinquetur A B neceſſario cognita.

REGULA.

Regula igitur communis eſt,duc 3^{am} partem numeri quadratorum (quam hoc ſigno, Tp̃q̃d: demonſtramus) ad cubum , addeq; numero inde duc numerum quadratorum in ſui tertiam partem , & producti differentia à numero rerum,eſt numerus rerum addendarũ cubo,ubi productum fuerit minus numero rerum propoſitarum uel addendarum numero,ubi productum fuerit maius numero rerũ propoſitarum.Si igitur differentia eſt nulla, producti & numeri rerum

erit

erit cubus æqualis numero iam coaceruato, inde ſumpta radice cubica numeri, minue ex ea τp̄q̄d: & reſiduum eſt rei æſtimatio, quod ſi poſitiones & cubus, æquentur numero, duces numerum poſitionum in τp̄q̄d: & productum addes numero iam aggregato, & habebis cubū, & res iam inuentas, æquales numero iam aggregato, inde ab æquatione minue τp̄q̄d:, & reſiduum eſt æſtimatio Quod ſi productum fuerit maius numero rerum, duc differentiam, quæ eſt numerus rerum, in τp̄q̄d: & productum minue ex numero, quē habebas, aggregato, & ſi nihil ſupereſt, habebis cubū, ęq̄lem rebus iam propoſitis tantū, quare deducendo ad minorem denominationem habebis q̄d^m æquale numero, & res erit ℞ quadrata numeri rerum, à qua minue τp̄q̄d: & reſiduum erit æſtimatio rei. Quod ſi in detractione producti ex numero rerum in τp̄q̄d: à numero aggregato, ſuperſit, numerus ille cum rebus iam propoſitis, æquatur cubo, inde ab æſtimatione minue τp̄q̄d: & reſiduum eſt ęſtimatio quæſita. Sed ſi productum numeri rerum in τp̄q̄d: maius eſſet numero iam aggregato, differētia eſt numerus, qui cum cubo æquatur rebus iam propoſitis, inde habita æſtimatione minue τp̄q̄d: & reſiduum eſt æſtimatio rei.

Cor^m. Ex hoc patet, quod tale capitulum reſoluitur in quinq; capitula, quæ ſunt hæc in margine poſita, & non poſſunt reſolui in plura, in aliquibus autem ſequentium reſolutio fit in tria poſtrema tantum, in omnibus autem capitulis quatuor denominationum, cōmune eſt, cum fuerint reſoluta in capitulum trium uel duarum denominationum, ut æſtimationi inuentę addatur aut minuatur τp̄q̄d: ut in hoc capitulo ſemper minuitur, & commune eſt etiam omni capitulo, ut rerum numerus & numerus ipſe conſtituantur eodem modo, uelut hic numerus rerum, eſt differentia numeri rerum aſſumptarum in capitulo quatuor denominationum, & producti ex numero quadratorū in ſui tertiam partem, & numerus capituli in quod reſoluitur, eſt differentia producti ex numero rerum iam inuentarū, in τp̄q̄d: & aggregati ex cubo τp̄q̄d: & numero æquationis primo.

cubus & res ęquales numero.
cubus æqualis numero.
cubus æqualis rebus.
cubus æq̄lis rebus & numero
cubus & numerus æq̄les reb⁹

QVÆSTIO I.

Exemplum. Eſt corpus quadratum undequaq;, quod cum ſuperficiebus & lateribus eſt 22, dices igitur, cubus & 6 quadrata & 12 res æquantur 22, cuba igitur 2, tertiam partem numeri quadratorum, fit 8, adde ad 22 fit 30, deinde duc 6 numerum quadratorū in 2 ſui partem

tem tertiam, fit 12, differentia cuius à numero rerum eſt nihil, nam res etiam fuerãt 12, habemus igitur 1 cubũ ęqualem 30, & res eſt ℞ cub. 30, abijce 2 Tp q̃d: fit æſtimatio rei, ℞ cub. 30 m: 2.

Experientia autem eſt, ut iungas 1 cub. p: 6 q̃d: p: 12 reb⁹, & fiũt 22.

Sex quadrata	24 p: ℞ cub. 194400, m: ℞ cub. 414720
cubus	22, m: ℞ cub. 194400, p: ℞ cub. 51840
Duodecim res	℞ cub. 51840 m: 24
Aggregatum 22	

QVÆSTIO II.

Exemplum ſecundi. Inuenias quatuor numeros continue proportionales, quorum primus ſit 3, & reliqui tres ſint 19, pone 2^m 1 rem, erit tertius $\frac{1}{3}$ q̃drati, & quartus erit $\frac{1}{9}$ cubi, igitur 1 poſitio $\frac{1}{3}$ q̃drati, $\frac{1}{9}$ cubi, æquantur 19, duc ad integra habebis cubum & 3 quadrata & 9 res, ęqualia 171, nam omnia ducuntur per 9, adde igitur cubum tertiæ partis numeri quadratorum ad 171, & eſt 1, fit 172, deinde duc 3 numerum quadratorum in ſui tertiam partem fit 3, huius producti, & 9 numeri rerum, differentia eſt 6, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, quia productum fuit minus, duc igitur 6 numerum rerũ in 1 Tp q̃d: fit 6, adde ad 172, fit 178, igitur cubus & 6 res ęquantur 178, & rei æſtimatio eſt ℞ v: cubica ℞ 7929 p: 89 p: ℞ v: cubica ℞ 7929 m: 89, ab hoc minue Tp q̃d: quæ eſt 1, habebis ſecundam quantitatem ℞ v: cubicam ℞ 7929 p: 89 m: ℞ v: cubica ℞ 7929 m: 89 m: 1, ex qua habebis reliquas.

Exemplum tertij modi. Cubus & 6 quadrata & 1 poſitio, æquantur 14, adde cubum 2 Tp q̃d: qui eſt 8, ad 14, fit 22, deinde duc 6 numerum quadratorum in 2 tertiam ſui partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum eſt 11, numerus rerum ęqualium cubo cum numero, quia numerus productus 12 fuit maior numero rerum, duc igitur 11 in 2 tertiam partem numeri quadratorum, fit 22, differentia cuius & numeri prioris aggregati eſt nulla, quare habebimus cubum ęqualem 11 rebus, igitur quadratum æquatur 11, res igitur eſt ℞ 11, à qua minue 2 Tp q̃d: fit rei æſtimatio ℞ 11 m: 2, ſumpſiſti autem differentiam in numero & non aggregaſti, quia res ęquabantur cubo, & non cubus cum rebus æquabantur numero, ut in præcedente exemplo.

QVÆSTIO III.

Exemplum quarti modi. Ex oraculo iubet princeps fieri ſacram ædem, cuius ſpacium ſit 400 cubitorum, & longitudo latitudine maior ſit 6 cubitis, latitudo altitudine 3 cubitis maior, quæritur quantitas. Pone Altitudinẽ rem, Latitudo erit 3 p: & Longitudo 9 p: duc

K inuicem

inuicem habebis 1 cub. p: 12 quadratis p: 27 poſitionibus, æqualia 400, adde ad 400, cubum 4 rpq̄d: qui eſt 64, fit 464, duc 12 numerū quadratorum in tertiam ſui partem, fit 48, cuius differentia à 27, eſt 21, numerus rerum, quæ æquantur cubo cum numero, quare duc 21 in 4 rpq̄d: fit 84, ſume differentiã à 464, quæ eſt 380, & eam adde rebus, quia aggregatum numerorum primum, fuit maius numero producto ſecundo, habebis cubum æqualem 21 poſitionibus p: 380, res igitur ualet ℞ v: cubicam 190 p: ℞ 35757, p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757, ab hac minue 4 rpq̄d: habebis altitudinem, qua habita, addendo 3 & 9 habebis latitudinem & longitudinem, ut uides

Altitudo	1	poſ:
Latitudo	1	poſ: p: 3
Longitudo	1	poſ: p: 9
productum 1 cub. p: 12 q̄d: p: 27 poſ:		

Altitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757 m: 4
Latitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 m: 1
Longitudo, ℞ v: cu. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 p: 5

Exemplum quinti modi. Cubus & 6 quadrata, & 2 res, æquantur 3, adde 8, cubum rpq̄d: ad 3 fit 11, deinde duc 6 in ſuam tertiam partem, fit 12, differentia à 2, numero rerum eſt 10, numerus rerum, duc in 2 rpq̄d: fit 20, cuius differentia ab 11, eſt 9 numerus, qui cum cubo æquatur 10 rebus, quia productum 2^{m} maius eſt numero aggregato, uoco autem productum ſecundum, quod fit ex numero rerum iam inuento, in rpq̄d: æſtimatio igitur rei quando cubus & 9 æqualia ſunt 10 rebus eſt 1, uel ℞ 9 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, ábijce igitur 2 rpq̄d: fient duæ æſtimationes quæſitæ, altera ℞ 9 $\frac{1}{4}$ m: 2 $\frac{1}{2}$ alia m: 1.

De cubo, & rebus æqualibus quadratis & numero. Cap. XVIII.

DEMONSTRATIO.

SIt in eadem figura, cubus A C cum 33 A C, æqualis 6 quadratis A C p: 100, (gratia exempli) diuidatur cubus A C, poſita B C rpq̄d: ſcilicet 2, in ſuas partes, erit cubus A C, æqualis cubo A B, cubo B C, ſex quadratis A B, & 12 poſitionibus A B, at 33 A C, ſunt 33 A B, & 33 B C, quæ ſunt 66, quia B C eſt 2, igitur cubus A C, & 33 A C, æquantur cubo A B, cubo B C, ſex quadratis A B, & 45 A B poſitionibus, & 66, hæc eadem igitur æq̄lia ſunt 6 quadratis A C, & 100, at 6 quadrata A C, diuiſa A C in B, per 4^{am} 2^{i} elementorum, æqualia ſunt 6 quadratis A B, & 6 quadratis B C, & 12 ſuperficiebus

ciebus A D,ſed A D eſt 2 poſitiões,quia B D eſt 2,igitur 12 A D ſunt 24 poſitiones A B,quare 6 quadrata A B,& 6 quadrata B C, & 24 poſitiones AB,& 100,ęquantur cubo A B,cubo B C,6 quadratis A B,& 45 A B & 66 numero,cubus autem B C eſt 8,& 6 quadrata B C ſunt 24, igitur 6 quadrata A B & 24 poſitiones A B,& 124,æquantur cubo A B, & 6 quad. A B,& 45 poſitionibus A B,& 74,facta igitur detractione ſimiliũ ex utraq; parte, ſcilicet 6 quad. 24 poſitionibus & 74, relinquetur cub⁹ A B

	6 q̄d^ta A B	24 poſ^es A B	124
cub⁹ A B	6 q̄d^ta A B	45 poſ^es A B	74
cub⁹ A B	p: 21 poſ^ib A B	æq̄les	50

p:21 poſitionibus A B,æqualis 50,manifeſtum eſt igitur quòd inuenta A B,ex capitulo ſuo,& addita B C ei quæ eſt 2,conſlatur A C. Manifeſtum eſt autem, quòd ubi poſitiones,quę cum cubo erant,eſſent æquales productis,haberemus cubum æqualem numero tantũ, & ubi poſitiones quæ cum cubo erant,eſſent pauciores, haberemus res ex una parte,& cubum ex alia,& tunc ſi numerus qui eſt cum cubo,foret æqualis alteri,eſſent poſitiones æquales cubo,& ſi eſſent minor, haberemus res & numerum æquales cubo,& ſi maior, haberemus res æquales cubo & numero,ex eadem demonſtratione,uelut in præcedente capitulo.

Regvla.

Regula igitur eſt,ut primo ſtatuas numerum rerum ſemper, ut in præcedenti capitulo,& eſt ut ducas numerum quadratorũ in tertiam ſui partem,& differentia huius producti,à numero rerum, eſt numerus rerum,quæ ſi nulla ſit,habebimus cubum æqualem numero, ſi autem productum ſit minus numero rerum,differentia erit numerus rerum,quę cum cubo ęquantur numero,& ſi productum fuerit maius, habebimus res æquales cubo,& tunc ſi numeri erunt æquales,erit cubus æqualis rebus,& ſi qui producitur ex numero rerum, in ꝛp̄q̄d: fuerit minor numero æquationis cum additione,erit cubus ęqualis rebus & numero, quod ſi productus numerus ex rerum numero in ꝛp̄q̄d: fuerit maior numero æquationis cum ſua additione, habebimus res æquales cubo & numero,numerus autem æquationis ſic habetur,duc priorem numerum rerum,in tertiam partem numeri quadratorum,& producti accipe differentiam, cum aggregato numeri æquationis,& dupli cubi ꝛp̄q̄d: differentia, erit numerus addendus cubo uel rebus,prout oportuerit,uel numerus æq̄lis cubo, ubi nullæ ſint res,inde habita æſtimatione,eam adde uel minus ꝛp̄q̄d: prout in exemplis doceberis,& habebis quæſitam æſtimationem.

Exemplum primum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis &

 25,

25,duc 6 in 2,ſui tertiam partem,fit 12,differentia cuius à numero rerum nulla eſt,igitur cubus æquabitur numero, duc ergo 12 numerũ rerum,in 2 tpq̄d:fit 24,abijce ex 41 , aggregato 16 dupli cubi 2, & 25 numero æquationis,relinquitur 17,qui æquatur cubo , res igitur eſt ℞ cubica 16,adde ei 2 tpq̄d:fit rei æſtimatio ℞ cubica 17 p: 2.

Exemplum ſecundum. Mercator fugiens,paciſcitur redditurum $\frac{3}{4}$ debiti proportionaliter in tribus annis,ita quod ſi pactus fuiſſet redditurum $\frac{19}{27}$ primo anno reddidiſſet $\frac{9}{27}$,ſecundo $\frac{6}{27}$,tertio $\frac{4}{27}$, ut reſidua ſint in eadem proportione,cum reſiduo capitali , quæritur portio cuiuſq; anni,reddendo ſolum $\frac{3}{4}$,& ponamus , quod capitale ſit 4, ad uitandum fractiones,uult igitur reddere 3,pone igitur quod reſtituat primo anno rem,igitur ſecundo anno reſtituet rem m: $\frac{1}{4}$ q̄d^ti , & tertio anno,rem m: $\frac{1}{2}$ q̄drati p: $\frac{1}{16}$ cubi,igitur in tribus annis reſtituet 3 res p: $\frac{1}{16}$ cubi m: $\frac{3}{4}$ q̄drati,& hoc iam ſupponitur 3, quare reducito ad integrum,cubum ducendo per 16,habebis 1 cubum p: 48 rebus, æqualem 12 q̄dratis p: 48,duc 12 in 4 tertiam ſui partem,fit 48 , igitur differentia rerũm nulla eſt,& cubus æquabitur numero , duc igitur 48,numerum rerum,in 4 tpq̄d:fit 192,à quo detrahe 176,aggregatum ex duplo cubi 4,& 48 numero æquationis,relinquitur 16 ,& hic æquatur cubo,igitur rei æſtimatio eſt ℞ cubica 16, quam minue ex 4, tpq̄d: fiet æſtimatio quæſita 4 m: ℞ cubica 16,reddet igitur anno primo 4 m: ℞ cubica 16,& ſecundo ℞ cubicam 16 m: ℞ cubica 4, & tertio,℞ cubicam 4 m: 1,& horum reſidua , ſunt proportionalia, cum 4,& iuncta faciunt 3,& eſt conuerſum primi exempli,& reſidua ipſa ſunt ℞ cubica 16,℞ cubica 4,& 1.

Exemplum tertium. Cubus & 15 res,æquantur 6 q̄dratis & 24, duc 6 in ſui tertiam partem,fit 12,cuius differentia à 15 numero rerum,eſt 3,& quia productum fuit minus,erit cubus & 3 res,æqualia numero,duc igitur 15 numerum rerum,in 2 tpq̄d: fit 30, minue ex 40,aggregato 24 & duplo cubi tpq̄d: relinquitur 10 , igitur 10 æquatur cubo p: 3 rebus,& rei æſtimatio eſt ℞ v: cubica ℞ 26 p: 5,m: ℞ v: cubica 26 m: 5 , cui adde 2 tpq̄d: habebis quæſitam æſtimationem.

Exemplum quartũ. Cubus & 15 res,æquantur 6 q̄dratis p: 10, iterũ habebo cubũ & 3 res,æq̄les numero, & numerus ꝓductus erit 30,ut prius,uerum aggregatum ex duplo cubi 2,tpq̄d:& 10 numero æquationis,eſt 26,differentia igitur eſt 4 , cum igitur cubus & 3 res æquentur 4 , rei æſtimatio eſt 1 , & quia productus numerus eſt maior aggregato,id eſt 30,maior eſt 26,minuemus 1 æſtimationem

æqua-

æquationis inuentæ ex 2, ℞ cu̅: & relinquetur 1 æſtimatio quæſita cubi & 15 rerum, æqualium 6 quadratis & 10.

Ideo patet quod in hoc caſu, ubi cubus & res, æquantur numero, ſi differentia numerorū nulla foret, uelut ſi loco 10, poſuiſſemus 14, æſtimatio rei eſſet ℞ cu̅: ſcilicet 2, quia in æquatione inuenta, nihil haberemus addendum uel minuendū, quia cubus & 3 res, æquarentur nihil.

Exemplum quintum. Cubus & 10 res, æquatur 6 quadratis p: 4, duc igitur numerum quadratorum in tertiam ſui partem, ut prius, fit 12, differentia cuius à numero rerum, eſt 2, & quia productum eſt maius numero rerum, ideo 2 res ęquabuntur cubo, pro numero itaq; duc 10 numerum rerum primum, in 2 ℞ cu̅: fit 20, differentia cuius à 20, aggregato dupli cubi ℞ cu̅: & 4, eſt nihil, igitur nō habebimus numerum, ſed cubus æquabitur, ut dictum eſt, 2 rebus, igitur deprimendo, quadratum æquabitur 2, ergo rei æſtimatio, eſt ℞ 2, quam adde uel minue ℞ cu̅:, habebis ueram æſtimationum quæſitam, 2 p: ℞ 2, uel 2 m: ℞ 2, & poteſt etiam eſſe 2, & ſic habet tres æſtimationes hic caſus.

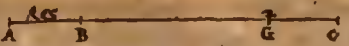
Exemplum ſextum. Sit cubus & 21 res, ęqualia 9 q̄d^ris p: 5, tunc ut prius, ducam 9, in 3 tertiam ſui partem, fit 27, huius differentia à 21, eſt 6, numerus rerum, cubo æquandarum, quia productum 27, eſt maius 21 numero rerum, addo igitur 54, duplum cubi ℞ cu̅: ad 5 numerum æquationis fit 59, cuius differentia, à 63, producto numeri rerum prioris, in ℞ cu̅: eſt 4, igitur quia productum eſt maius aggregato, addemus numerū cubo, & fiet 1, cubus p: 4, æqualis 6 rebus, iam inuentis, huius igitur æſtimationes ſunt tres, prima eſt 2, ſecunda ℞ 3 m: 1, tertia ficta m: ℞ 3 p: 1, quas adde ad 3 ℞ cu̅: habebis ueras æſtimationes illas quas à latere uides.

Prima	5
Secunda	2 p: ℞ 3
Tertia	2 m: ℞ 3

Exemplum ſeptimum. Cubus & 26 res, æquantur 12 quadratis p: 12, duc 12 numerum quadratorum, in ſui tertiam partem, quæ eſt 4, fit 48, cuius differentia à 26, numero rerum, eſt 22, & quia productum eſt maius numero rerum, res ęquabuntur cubo, deinde duc 26 numerum rerum, in 4 tertiam partem numeri quadratorum, fit 104, abijce ex 140 duplo cubi ℞ cu̅: & 12 numeri ſimul iunctis, fit 36, numerus addendus rebus, quia aggregatum eſt maius producto, econtrario, exemplo præcedenti, cubus igitur æquabitur 22 rebus, p: 36, quare eius erunt tres ęſtimationes, prima ℞ 19 p: 1, & eſt uera, ſecunda ficta m: ℞ 19 m: 1, tertia etiam ficta, quæ eſt m: 2, has adde ſingu-

 las,

B C,qui eſt 8,ſunt 2 m: quàm cubus A B cum 100 rebus,dico autem 2 m: quia cubus B C,qui iungitur 6 quadratis,debuit eſſe 10,& eſt tantum 8,at cubus A B cum 100 rebus,ſuperat cubum A B, & triplũ A B in quadratum B C,quod eſt 12 res,in 88 rebus,differentia igitur cubi B C,& tripli B C in quadratum A B,à cubo A B,cum triplo A B in quadratum B C,eſt 88 A B,m: 2,huic igitur differentiæ,æqualis eſt cu



bus G B,ut diximus,ponatur igitur B G res,erit igiť G C ſeu A B, 2 m: re,cuius quantitas ſumpta 88 uicibus, ut dictum eſt, æquatur cubo B G p: 2,igitur cubus B G,p: 2,p: 88 ſuis rebus,æqualis eſt 176,quare cubus B G cum 88 ſuis rebus,æquatur 174, quare ſi eam æſtimationem B G detraxeris ex B C,quæ eſt tpq̄d: ſcilicet 2, habebis quantitatem A B,quæſitam.

ALIA DEMONSTRATIO.

Ponatur rurſus,cubus cum 5 rebus, æqualis 6 quadratis ac 10, & ponatur E F res,D E tpq̄d: differentia D E & E F, E H,eritq́ ex demonſtratione conſimili præmiſſæ,ut cubus E H, æquetur 7 reb' p: 16,inde inuenta æſtimatione,



ſi ei addatur H F tpq̄d: quæ eſt 2,habebitur E F res quæſita,nec in hoc addam uerba,quia demonſtratio eſt ſimilis præmiſſæ,& operatio eius in hac parte,eſt clarior in noſtra demonſtratione.

REGVLA.

Regula igitur ſumpta ex hac demonſtratione eſt,ſi numerus rerum æqualis eſt,producto ex numero quadratorum in ſuam tertiam partem,duc tpq̄d: ad cubum,℞ cubicam differentiæ huius,& numeri æquationis,adde tpq̄d: ubi cubus ſit minor numero, aut minue, ubi ſit maior,& totum eſt æſtimatio rei,manifeſtum eſt autem, quòd ubi cubus tpq̄d: & numerus,ſint æquales,non addemus nec minuemus,ſed tpq̄d: erit ipſa rei æſtimatio.

Exemplum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis p: 8, tunc quia ducto 6,numero quadratorum,in 2 ſui tertiam partem, fit 12, numerus rerum,ad unguem,ideo duc 2 tpq̄d: ad cubum,fit 8, cuius differentia à numero æquationis nulla eſt, ideo æſtimatio rei eſt 2 tpq̄d: Et ſi cubus & 12 res,æquantur 6 quadratis p: 9,tunc quia cubus æquatur numero,abijciemus 8,cubum tpq̄d: ex 9,relinquitur 1 cuius ℞ cubicam quæ eſt 1,addo tpq̄d: quia cubus tpq̄d. eſt minor æquatione numeri,fit rei æſtimatio 3. Et eadem ratione, ſi cubus p: 12 rebus,æquetur 6 quadratis p: 7,detracto 7 ab 8,cubo tpq̄d. relinqui-

linquitur 1, cuius ℞ cubicam quæ eſt 1, detrahe ex 2, τpq̄d. relinquitur 1, rei æſtimatio.

Quòd ſi numerus poſitionum, maior ſit producto ex numero quadratorum in ſui partem tertiam, differentia erit numerus rerum, ut in prima demonſtratione, & ſuis regulis, hunc duc in τpq̄d. & ei adde cubum τpq̄d. & huius aggregati, numeriq́ æquationis differentia, eſt numerus æquationis cubi, & talium rerum differentia, ſi nulla ſit, æſtimatio rei eſt τpq̄d. Et ſi numerus æquationis eſt minor aggregato, æſtimationem inuentam minue, & ſi maior, adde τpq̄d. quod fiet, erit rei æſtimatio. Exemplum, cubus & 20 res, æquantur 6 quadratis & 24, ducto 6 in 2, tertiam partē ſui, fit 12, cuius differentia à 20, numero rerum, eſt 8, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, duc igitur 8 numerum rerum, in 2 τpq̄d. fit 16, adde ei 8, cubum τpq̄d. fit 24, differentia cuius nulla eſt à 24 numero æquationis, igitur æſtimatio rei eſt τpq̄d. ſcilicet 2, ſit rurſus cubus cū 20 rebus, æqualis 6 quadratis & 15, habebimus igitur, ut prius, cubum & 8 res, pro numero, duc ut prius, 8 numerum rerum poſteriorem in 2 τpq̄d. fit 16, adde cubum τpq̄d. fit 24, abijce 15, relinquitur 9, igitur cubus & 8 res, æquatur 9, & rei ęſtimatio eſt 1, quod minue ex 2, τpq̄d. relinquitur uera æſtimatio rei 1, minuiſti autem, quia 15 numerus æquationis, eſt minor aggregaio cubi & producti, quod eſt 24, & ſi bene animaduertis, eodem modo fit in prima parte regulæ, quando numerus rerum æqualis eſt producto ex numero quadraiorum in ſui partem tertiam. Rurſus, cubus cum 20 rebus, æqualis ſit 6 quadratis p: 33, habebis itaq; cubum, ut prius, & 8 res, æquales differentiæ 24 aggregati, & 33 numeri æquationis, quare cubus & 8 res, æquabuntur 9, & æſtimatio rei erit 1, addendum τpq̄d. quia numerus æquationis 33, eſt maior numero aggregato 24, quare rei æſtimatio erit 3.

Quòd ſi numerus poſitionum, minor ſit producto ex numero quadratorum in ſui tertiam partem, differentia nihilominus erit numerus rerum, ut prius, ſed hæ non copulabuntur cubo, imò erunt ei æquales, deinde duc ipſum numerum rerum poſteriorum, in τpq̄d, & productū iunge numero æquatiōis, huius aggregati & cubi τpq̄d. differentia eſt numerus æquationis ſecundæ, ſi igitur differentia nulla eſt, cubus æquabitur rebus, & ℞ quadrata numeri rerum addita τpq̄d. eſt æſtimatio rei, quod ſi aggregatum ſit maius cubo, erit differentia, numerus qui cū rebus ęquatur cubo, inde habita æſtimatione, adde ei τpq̄d. & fiet uera æſtimatio. Quòd ſi cubus fuerit maior aggrega-

gregato, differentia erit numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æſtimatione, adde ei ꝑp̃q̃d. quod conflatur, eſt rei uera æſtimatio, & tam multiplex habenda, ut in noſtra regula docuimus, quanquam quod ad regulam pertinet, & hæc noſtra ſit. Exemplũ igitur, Cubus & 9 res, æquales ſint 6 quadratis p: 2, tunc numerus rerum ſecundus erit [illegible] duc in 2, ꝑp̃q̃d. fit 6, adde ad 2 numerum æquationis, fit 8, cubus autem ꝑp̃q̃d. eſt 8, differentia nulla, igitur cubus æquatur 3 rebus, res igitur eſt ℞ 3, & rei æſtimatio 2 p: ℞ 3. Rurſus, cubus p: 9 rebus, æqualis ſit 6 quadratis p: 4, habebimus ut prius, cubum æq̃lem 3 rebus, pro numero duc 3 numerum rerum poſteriorem in 2 ꝑp̃q̃d. fit 6, adde 4, numerum ęquationis, fit 10, abijce 8, cubum ꝑp̃q̃d. fit 2, addendus rebus, quia aggregatum eſt maius cubo ꝑp̃q̃d. igitur cubus æquatur 3 rebus, p: 2, & res erit 2, addito 2 ꝑp̃q̃d. fit 4, uera æſtimatio. Iterum, ſit cubus p: 21 rebus, æqualis 9 quadratis p: 5, erunt igitur 6 res in poſteriore æquatione, quia 9 numerus quadratorum, ductus in 3, tertiam ſui partem, producit 27, duc igitur 6 numerum poſteriorem rerum, in 3, ꝑp̃q̃d. fit 18, adde ei 5, fit 23, differentia cuius à numero producto ex cubo c ꝑp̃q̃d. eſt 4, & quia aggregatũ eſt minus cubo, ideo cubus & 4, æquabuntur 6 rebus, æſtimatio igitur eſt 2, uel ℞ 3 m: 1, & ficta ℞ 3 p: 1, quæ eſt m: ſi igitur his addas 3 ꝑp̃q̃d. habebis æſtimationes quæſitas 5, & 4 p: ℞ 3, & 2 p: ℞ 3, in harum qualibet uerum eſt, quod cubus & 21 res, æquales ſunt 9 quadratis & 5 numero.

De cubo & quadratis, æqualibus rebus & numero.
Caput XIX.

Demonstratio.

SIt etiam cubus A B, & 6 quadrata, æq̃lia 20 rebus p: 200, gratia exempli, & ponemus B C 2, ꝑp̃q̃d. erit igitur A C res p: 2, & eius cubus, erit cubus & 6 quadrata, & 12 res, & 8 iam autem ſuppoſitum eſt, quod cubus A B & 6 quadrata, ſint æqualia 20 rebus p: 200, igitur ponantur, 20 res & 200, loco cubi, & 6 quadratorum, & fiet cubus A C, æqualis 32 rebus p: 208, at quia 32 res A B, deficiũt à 32 rebus A C, in 32 B C, addantur utrique parti 32 B C, erunt igitur 32 res p: 208, æquales cubo p: 64, tantum enim ſunt 32 B C, abijce 64 ab utraque parte, erit cubus æqualis 32 rebus p: 144, inde inuenta æſtimatione abijce B C, ꝑp̃q̃d. relinquetur A B.

Regula.

Regula igitur eſt, duc numerum quadratorum, in tertiam ſui partem, productum adde numero rerum, & aggregatum erit numerus rerum, inde duc hunc numerum in ɼpq̄d. & producti ſume differentiam, ab aggregato ex numero æquationis, & cubo ɼpq̄d. quæ ſi nulla eſt, habebis cubum æqualem rebus, ſi uero ſit productum minus aggregato, differentia eſt numerus, qui cum rebus æquatur cubo, quod ſi productum fuerit maius aggregato, differentia eſt numerus qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æſtimatione, minue ɼpq̄d. reſiduum eſt æſtimatio uera, quæſita.

Exemplum, Cubus & 6 quadrata, æqualia ſunt 20 rebus & 56, duc 6 in 2 tertiam ſui partem, fit 12, adde ad 20 fit 32, duc 32 in 2 ɼpq̄d. fit 64, adde ad 56 numerum ęquationis 8 cubum ɼpq̄d. fit 64, differentia producti ab aggregato nulla eſt, res igitur æquabuntur cubo, quare deprimendo q̄dratum ęquatur 32, & res eſt ℞ 32, & uera æſtimatio ℞ 32 m: 2. Rurſus, cubus & 6 quadrata, æqualia ſint 20 rebus p: 112, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 20, fit 32, numerus rerum, duc in 2 ɼpq̄d. fit 64, abijce ex 120 aggregato cubi ɼpq̄d. & numeri æquationis, relinquitur 56, numerus qui cum 32 rebus, æquatur cubo, res igitur eſt ℞ 29 p: 1, minue ɼpq̄d. relinquitur æſtimatio rei ℞ 29 m: 1. Rurſus, cubus & 6 quadrata, æqualia ſint 20 rebus p: 41, habebis igitur ut prius, in ſecunda æquatione, 32 res, & 15 numerum, nam detracto 49 aggregato numeri ęquationis & 8 cubi ɼpq̄d. ex 64, producto 32 in ɼpq̄d. relinquitur 15, quia uero productum eſt maius aggregato, erit 15 cum cubo, æqualis 32 reb⁹, & res erit 5, uel ℞ 13 $\frac{1}{4}$ m: 2$\frac{1}{2}$, uel ficta ℞ 13 $\frac{1}{4}$ p: 2$\frac{1}{2}$, abijce 2 ɼpq̄d. habebis æſtimationem ueram 3, & duas fictas per m: ſcilicet 4$\frac{1}{2}$ p: ℞ 13$\frac{1}{4}$, & 4 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 13 $\frac{1}{4}$, ſicut diximus in capitulo primo.

De cubo æquali quadratis rebus & numero. Cap. XX.

Demonstratio.

Sit iterum cubus A C, æqualis 6 quadratis, 5 rebus, & 88 (gratia exempli) & ponatur B C ɼpq̄d. ſcilicet 2, manifeſtum eſt igitur, quod cubus A C, æquatur 6 quadratis A B & 12 A B, & cubis A B, & B C, hæc eadem igitur æqualia ſunt 6 quadratis A C, 5 rebus A C, & 88, abijciatur iam cubus B C communis, ſcilicet 8, relinquentur, cubus A B & 6 quadrata A B, & 12 A B, æqualia 6 quadratis A C, 5 rebus A C, p: 80, at 6 quadrata A C, ſuperāt 6 quadrata A B in 6 gnomonibus A B quadrati, & erunt 24 res ex A C, minus

minus 6 quadratis B C, quæ ſunt 24, igitur 6 quadrata A B & 29 res A C, & 56, æqualia ſunt cubo A B, & 6 quadratis A B, & 12 rebus A B, abijciantur igitur 6 q̄drata A B, cōmunia, relinquentur 29 res A C, p: 56, æq̄les cubo A B, & 12 rebus A B, & 29 res A C, ſuperant 29 res A B, in 29 B C, quare in 58, quia B C eſt 2, igitur addatur numerus numero, erunt 29 A B & 114, æqualia cubo A B & 12 rebus A B, abijciantur de nuo 12 res communes, erunt 17 res p: 114, æquales cubo, inde habita æſtimatione, adde ei B C.

Regvla.

Regula igitur eſt, Duc numerum quadratorum in tertiam ſui partem, & productum adde numero rerum, aggregatum erit numerus rerum, æqualium cubo, pro numero autem, duc numerum rerum ſecundum in T p q̄ d. & productum adde numero æquationis, à quo minue cubum T p q̄ d. reſiduum eſt numerus, qui cum rebus æquatur cubo, inde inuenta æſtimatione, adde ei T p q̄ d. & habebis uerum æſtimationem.

Qvæstio.

Exemplum, in hac quæſtione, Quidam dedit aureos 1728 ad caput anni ut dicunt, ſeu ſub uſura rediuiua, ea conditione, ut reciperet tertio anno, ex capitali & uſura, quantum eſt dimidium capitalis, & dimidium eius quod debuiſſet in fine primi anni, & dimidiū eius quod debuiſſet in fine ſecundi anni, ubi retinuiſſet pecunias, & uoluiſſet ſoluere ſub eadē uſura. Pone igitur quod in capite primi anni haberet 144 res, in capite ſecundi anni habebit 12 quadrata, in capita tertij anni habebit cubum, & hic erit æqualis dimidijs reliquorum annorum ſimul ſumptis, igitur cubus erit æqualis 6 q̄dratis 72 rebus & 729, duc igitur 6 numerum quadratorum in 2, tertiam ſui partem, fit 12 adde ad 72 fit 84, numerus rerum, duc 84 in 2 T p q̄ d. fit 168, adde ad 729, fit 897, abijce 8, cubum T p q̄ d. fit 889, igitur cubus æquatur 84 rebus p: 889, æſtimatio igitur huius erit ℞ v: cubica 444 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 175628 $\frac{1}{4}$, p: ℞ v: cubica 444 $\frac{1}{2}$, m: ℞ 175628 $\frac{1}{4}$, huic adde 2 T p q̄ d. habes quæſitam æſtimationem ℞ v: cubicam 444 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 175628 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica 444 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 175628 $\frac{1}{4}$ p: 2, cuius cubus eſt quantitas pecuniarū, quæ ei debentur tertio anno, inde detracto 1728, habebis ſortem, per terminos proportionales.

De cubo & numero, æqualibus quadratis & rebus. Caput XXI.

DEMONSTRATIO.

SIt cubus & 100, æqualia etiam 6 quadratis, & 24 rebus, & ſit cubus ille A C, & B C ꝛpq̄d. cunq; cubus A C, æqualis ſit cubo A B & 6 quadratis A B, & 12 rebus A B, & cubo B C, qui eſt 8, erit cubus A B, & 6 quadrata A B, & 12 res A B, & 108, æqualia 6 quadratis A C, & 24 rebus A C, ſed 6 quadrata A B, minora ſunt 6 quadratis A C, in 6 gnomonibus A D E, & 24 res A B, minores ſunt 24 rebus A C, in 24 B C, quare cubus A B, & 6 quadrata A B, & 12 res A B, & 108, æquantur 6 quadratis A B, & 6 gnomonibus A D E, & 24 rebus A B, & 48, nam 24 B C ſunt 48, igitur abiectis ex utraq; parte 6 quadratis A B, & 12 rebus A B, & 48, erit cubus A B, & 60, æqualis 6 gnomonibus A D E, & 12 rebus A B, ſunt autem 6 gnomones A D E, 24 res A B, p: 24, eo quod quælibet ſuperficierum A D, & D E, eſt 2 res, eo quod B D eſt 2, & quadratum B C eſt 4, igitur 36 res A B, & 24, ęquantur cubo A B p: 60, abijce 24 ex utraq; parte, erit cubus A B p: 36, æqualis 36 rebus A B, inde cognita A B addemus eam B C, quæ eſt ꝛpq̄d. & conflabitur æſtimatio.

REGVLA.

Regula eſt igitur. Duc numerum quadratorum in tertiam ſui partem, productum adde numero rerum, & conflabitur numerus rerũ, hunc duc in ꝛpq̄d. & producti ſume differentiam ab aggregato ex numero æquationis, & cubo ꝛpq̄d. quæ ſi nulla eſt, erunt res æq̄les cubo. Si uero productũ fuerit maius aggregato, differentia eſt numerus, qui cũ rebus æquatur cubo, & ſi aggregatũ fuerit maius producto, differentia eſt numerus, qui cum cubo ęquatur rebus, inde habita æſtimatiõe, addes eam ꝛpq̄d. & conflabitur uera ęſtimatio. Memineris tamen, quod quando capitulum hoc peruenerit ad capitulum cubi æqualis rebus & numero, addenda erit uera æſtimatio eius, & ex his quæ fictæ ſunt minor, per m: ꝛpq̄d: ut habeas utramq; æſtimationem capituli cubi & numeri æqualis rebus & quadratis, cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, unam tantum ueram æſtimationem habeat.

Exemplum, Cubus & 64, æqualia ſunt 6 quadratis & 24 rebus, duc 6 numerum rerum in 2, tertiam ſui partem, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, quem duc in 2 ꝛpq̄d. fit 72, deinde cuba 2 fit 8, adde ad 64, numerum æquationis, fit etiam 72, ideo quia differentia horum numerorum nulla eſt, habebimus cubum æqualem 36 rebus, quare quadratum æquabitur 36, igitur res eſt 6, ex capitulo ſimplici, adde ad 2 ꝛpq̄d. fit 8, æſtimatio rei. Rurſus, cubus & 128, æquetur 6

qua-

quadratis & 24 rebus, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, duc 36 in ℞ p̄q̄d. fit 72, differentia cuius à 136, aggregato 128 numeri æquationis, & 8, cubi ℞ p̄q̄d. eſt 64, numerus addendus cubo, quia aggregatum 136, eſt maius producto 72, quare cubus & 64, æqualia erunt 36 rebus, æſtimationes autem ſunt 2, & ℞ 33 m: 1, quas adde ad 2 ℞ p̄q̄d, fiunt ueræ æſtimationes 4, uel ℞ 33 p: 1. Rurſus, ſit cubus & 9, æqualis 6 quadratis & 24 rebus, duc, ut prius, 6 in 2, tertiam ſui partem, fit 12, quem adde ad 24, numerum rerum, fit 36, numerus rerū, ut prius, deinde duc 36, in 2 ℞ p̄q̄d. fit 72, differentia cuius à 17 aggregato 8, cubi ℞ p̄q̄d. & 9 numeri æquationis, eſt 55, ideo quia productum eſt maius aggregato, addemus 55 ad res, & habebimus cubum, æqualem 36 rebus p: 55, huius igitur uera æſtimatio eſt, ℞ $17\frac{1}{4}$ p: $2\frac{1}{2}$, falſa maior eſt m: 5, & falſa minor m: v: ℞ $27\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$, ſeu ut clarius intelligas, $2\frac{1}{2}$ m: ℞ $17\frac{1}{4}$, adde igitur hanc æſtimationem, & ſimiliter ueram, ℞ p̄q̄d. quæ eſt 2, habebis æſtimationes quæſitas, alteram $4\frac{1}{2}$ p: ℞ $17\frac{1}{4}$, reliquam $4\frac{1}{2}$ m: ℞ $17\frac{1}{4}$.

De cubo rebus & numero, æqualibus quadratis. Caput XXII.

Demonstratio.

Sit denuo cubus a c, cum 4 rebus, & 16 numero, æqualis 6 quadratis, & b c ſit ℞ p̄q̄d, ut prius, reſoluemus igitur cubum a c, qui æqualis eſt cubo a b, 6 quadratis a b, 12 rebus a b, & cubo b c, qui eſt 8, & erit hoc totum, cum 4 rebus a c, & 16, æquale 6 q̄dratis a c, quare cū 4 res a c, ſint 4 res a b, p: 4 b c & ideo p: 8, erunt cubus a b, p: 6 quadratis a b, p: 16 rebus a b, p: 32, æqualia 6 quadratis a c, 6 aūt q̄drata a c, æqualia ſunt, ut demonſtratum eſt, 6 quadratis a b, p: 24 rebus a b, p: 24, igitur cubus a b, & 6 quadrata a b, & 16 res a b, & 32, æqualia ſunt, 6 quadratis a b, p: 24 rebus a b, p: 24, abijce ex utraque parte 6 q̄drata a b, & 16 res, & 24, relinquetur cubus a b, p: 8, æqualis 8 rebus, inde cognita a b, adde ei b c, ℞ p̄q̄d. & fiet a c cognita, rei æſtimatio. Rurſus, cubus & 4 res & 1, æquentur 6 quadratis, erunt igitur 6 q̄drata a c, ut prius, 6 quadrata a b, 24 res a b, & 24. At cubus a c, cum 4 rebus a c, p: 1, æqualis eſt cubo a b, & 6 quadratis a b, & 16 rebus, & 17, quare abiectis communibus, 6 quadratis a b, & 16 rebus a b, & 17, erit reliquum reliquo æquale, ſcilet cubus, æqualis 8 rebus p: 7, inde cognita a b, habes a c, ut prius, addendo b c ℞ p̄q̄d.

Regula.

Regula igitur eſt, Duc numerum quadratorum in ſui tertiã partem, & à producto minue numerum rerũ, quod ſi fieri nequeat, caſus eſt impoſsibilis, in uera æſtimatione, reſiduum itaq; erit numerus rerum, inde multiplica primum numerum rerum in ꝛpq̄d, & productũ adde numero æquationis, huius aggregati & dupli cubi ꝛpq̄d. differentiã accipe, quæ ſi nulla eſt, habes cubum æqualem rebus ſolum, ſin duplum cubi ꝛpq̄d. maius eſt, differentia eſt numerus addendus rebus, ſi duplum cubi minus eſt aggregato, differentia eſt numerus addendus cubo, inde ęſtimationi inuentæ adde ꝛpq̄d. ut habeas æſtimationem ueram.

Exemplum, cubus & 4 res & 8, æquantur 6 quadratis, duc 6 in 2, tertiam ſui partem, fit 12, abijce 4 fit numerus rerum 8, duc etiam 4 numerum rerum, priorem, in 2 ꝛpq̄d. fit 8, adde ad 8, numerũ æquationis, fit 16, huius & dupli cubi ꝛpq̄d. quod eſt etiã 16, nulla eſt differentia, quare cubus æquatur 8 rebus, & rei æſtimatio eſt ℞ 8, cui adde 2 ꝛpq̄d. fiet uera æſtimatio rei, ℞ 8 p: 2. Rurſus, cubus p: 4 rebus p: 16, æqualis ſit 6 quadratis, duco 6 in 2 ꝛpq̄d. ut prius, fit 12, abijce 4 numerum rerum, fit 8, rerum numerus, duco 4 numerũ priorem rerum, in 2 ꝛpq̄d. fit 8, adde ad 16 numerum æquationis, fit 24, abijce 16, duplum cubi ꝛpq̄d. relinquitur 8, igitur addemus 8 cubo, quia aggregatum maius eſt duplo cubi ꝛpq̄d. & fiet cubus p: 8, æqualis 8 rebus, res igitur eſt 2, uel ℞ 5 m: 1, quare addito 2, ꝛpq̄d. fiet uera ęſtimatio 4, uel ℞ 5 p: 1. Rurſus, cubus & 4 res & 1, æquentur 6 quadratis, eruntq;, ut prius, 8 res, & ducto numero rerum priore, qui eſt 4, in 2 ꝛpq̄d. fit 8, addito 1, numero ęquationis, fit 9, duplum cubi ꝛpq̄d. eſt 16, differentia eſt 7, & quia duplũ cubi maius eſt aggregato, erũt 8 res, & 7, æqualia cubo, quare res ualet ℞ 7 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, uel in æquatione falſa, minor æſtimatio erit 1 m: adde 2 ꝛpq̄d. cuiuis, habebis duas ueras æſtimationes, ſcilicet 1, & ℞ 7 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$.

Memineris autem eius, quod diximus in præcedenti capitulo, etiam hic, quod cum peruenerit æquatio ad cubum æqualem rebus tantum, quia falſa æſtimatio à uera non differt in numero, ideo pro ſecunda æſtimatione, quia nihil additur, nec p: nec m: ꝛpq̄d. ideo ipſa ꝛpq̄d, erit æſtimatio uera, in utroq;, ut hic æſtimatio cubi & 4 rerum & 8, æqualium 6 quadratis, erit ℞ 8 p: 2, uel 2, & in præcedente capitulo, æſtimatio cubi & 64, æqualium 6 quadratis & 24 rebus, erit 8 ut dictum eſt, & etiam eſt 2, ꝛpq̄d. ſcilicet, & hoc, quia omnes additiones & detractiones, ex tertia parte numeri quadratorum fieri debent.

De cubo quadratis & numero, æqualibus rebus. Caput XXIII.

Demonstratio.

Sit etiam cubus, 6 quadrata, & 4, æqualia 41 rebus, & ſit cubus A B, cui addam B C Tpq̄d. eritq́ A C cubus, æqualis cubo A B, 6 quadratis, 12 rebus, & 8, loco cubi A B 6 quadratorum, & 4, ponantur 41 res, his æquales, erit cubus A C æqualis 53 rebus A B, & 4, qui eſt differentia cubi B C, & 4 numeri equationis primi, ad complendum igitur 53 res A C, addantur 53 B C, eruntq́ cubus A C p: 106, æqualia 53 rebus A C, p: 4, abijce 4 ex utraque parte, erit cubus p: 102, æqualis 53 rebus ſuis, inde A C æſtimatione inuenta, abijce B C Tpq̄d. relinquetur A B cognita, & eſt res ipſa.

Regula.

Regula igitur eſt, Duc numerum quadratorum in tertiam ſui partem, productum adde numerō rerum, fiet numerus rerum ſecundus, ab hoc minue quadratum Tpq̄d, & reſiduum duc in Tpq̄d. & totum productum adde numero æquationis, & conflabitur numerus, qui cū cubo æquabitur rebus iam aſsignatis, inde ab eius ęſtimationibus minue Tpq̄d. reſidua ſunt quæſitæ æſtimationes, ideo ſufficiet unum exemplum.

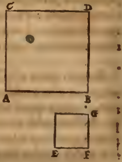
Cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus, Duc 6 numerū quadratorum, in 2, ſui tertiam partem, fit 12, adde ad 31, fit 43, numerus rerum, ab hoc abijce 4 quadratū Tpq̄d. relinquitur 39, quem duc in 2 Tpq̄d. fit 78, adde ad 12, numerum æquationis, fit 90, igitur cubus p: 90, æquatur 43 rebus, res igitur eſt 5, uel R̸ $24\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$, abijce 2 Tpq̄d. habebis ueras æſtimationes 3, uel R̸ $24\frac{1}{4}$ m: $4\frac{1}{2}$, & in ijs ambabus, uerū eſt, quod cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus. Memineris igitur quod omnes horum capitulorum æſtimationes, habentur, addendo ſemper ueras & fictas æſtimationes capitulorum in quo reſoluuntur Tpq̄d, & dummodo numerus relinquat̄, etiam id quod additur ſit m: purum, illud relictum eſt rei uera æſtimatio. poſſunt etiam reſolui in capitula alia quatuor denominationū, ut liquet.

De 44 capitulis deriuatiuis. Cap. XXIIII.

Demonstratio.

Sit

Sit igitur (gratia exempli) cubus quadrati, cum 6 q̄d'q̄dratis, æqualis 100, & ſit cubus q̄drati, corpus A B C D, altitudinem habens A B, erit igitur q̄dratum, quia latus cubi cũ corporis A B C D, quod ſupponitur cubus quadrati, manifeſtum eſt igitur, quod ſuperficies A B C D, eſt q̄d'q̄d^m, quia iam A B ſupponitur quadratum, ſexcuplum igitur A B C D ſuperficiei, cum A B C D corpore, æq̄le eſt 100, ex ſuppoſito, ponatur igitur A B res, erit igitur corpus A B C D cubus, & ſuperficies A B C D q̄dratum, ſuppoſitum eſt aũt, quod corpus A B C D, cum ſexcuplo A B C D ſuperficiei, ſit æquale 100, igitur cubus A B & 6 quadrata A B, æqualia ſunt 100, quare ex ſuo capitulo A B cognita, at A B in prima interrogatione fuit q̄dratum, igitur æſtimatio quadrati in prima interrogatione, quando cubus quadrati, & 6 q̄d'q̄d^ta æquantur 100, cognita erit, cum ſit eadem æſtimationi rei in ſecunda quæſtione. At nos uolumus in prima quæſtione rei æſtimationem, res autem eſt ſemper ℞ quadrati, igitur ℞ A B æſtimationis inuentæ per ſecundam quæſtionem, eſt rei ęſtimatio in prima quæſtione, ut proponebatur. Eadem ratiõe, ſi poſuerimus cubũ quadrati, & 6 cubos, æquales 100, erit corpus A B C D, cubus quadrati, & A B quadratum, cui ſi ponatur aliqua ſuperficies quadrata æqualis, puta E F G, erit ſexcuplum corporis ex E F in E F G, cum corpore A B C D, æquale 100, ponatur modo corpus E F G res, quia igitur E F eſt ℞ A B, ex ſuppoſito erit cubus E F ℞ cubi A B, igitur corpus A B C D, quadratũ corporis ex E F in E G, poſito igitur corpore A B C D quadrato, erit cubus E F res, & ſexcuplum eius ſex res, & iam ſexcuplum cubi E F, cum corpore A B C D, æquabatur 100, & non mutantur corpora, ſed manent eadem, & ſexcuplum cubi E F, eſt 6 res, et corpus A B C D quadratum, igitur quadratum & 6 res, æquantur 100, igitur res eſt cognita, ſcilicet cubus E F, ſed cum E F ſit latus cubi cum ſui cubi, igitur E F cognita erit, quæ eſt ℞ cubica, æſtimationis inuentæ. At cum E F ſit res in prima quæſtione, quia eſt ℞ quadrata A B, & A B ſupponitur quadratum, poſito A B C D, corpore cubo quadrati, igitur poſito A B C D corpore cubo quadrati, erit res E F, & nota latus ſcilicet cubicum æſtimationis inuentę per ſecundam quæſtionem, quam uolumus.



Ex hoc manifeſtæ ſunt regulæ capitulorum deriuatiuorum omnium.

nium.oſtendimus enim in uniuerſum,capitula 16 primitiua compoſita,& ſunt hæc.

Primũ,Quadratũ æq̃le rebus & numero. 2m,res æq̃les q̃dº & numero. 3m,numerus æq̃lis q̃dº & rebus.4m,cubus æq̃lis rebus & numero. 5m,res æq̃les cubis & numero.6m , numerus æq̃lis cubo & rebus. 7m,cubus ęq̃lis q̃dˢ & numero. 8m,q̃dˢ ęq̃lia cubo & numero.9m,numerus æq̃lis cubo & q̃dˢ. 10m,cubus æqualis q̃dˢ rebus & numero. 11m, q̃dˢ æq̃lia cubo reb⁹ & numero. 12m,numerus æq̃lis cubo q̃dˢ & reb⁹. 13m,res æq̃les cubo q̃dˢ & numero. 14m,cubus & numerus ęq̃les q̃dˢ & reb⁹. 15m.cubus & res æq̃les q̃dˢ & numero. 16m,cubus & q̃dˢ ęq̃lia rebus & numero. Manifeſtũ eſt aũt quòd ex his 2m, 5m, 8m, 11m, 13m & 14m,ſcdm naturam,habent duas æſtimationes,ex toto diuerſas, & à diuerſis regulis pendentes. Vnde duplicatis his capitalis fiẽt capitula primitiua 22 cõpoſita,unicuiq; aũt eorum debent duo capitula deriuatiua,alterũ ex natura q̃drati,alterum ex natura cubi, nam etſi deriuatiua ſint infinita,in unoquoq; capitulo, omnia tñ reducũtur ad alterum hoꝝ duorum modorum,loquendo de his,de q̃bus poteſt haberi regula generalis. Igitur manifeſtũ eſt,ipſa eſſe ad unguẽ 44, q̃uanq; eñ capitulum rerum æq̃lium q̃dratis & numero,habeat duas æſtimationes diuerſas,ideo tñ duplicatum dici nõ debet,quia illæ æſtimationes una regula ſimul habent,& ſimiliter quamuis capitulũ cubi & rerum æq̃lium q̃dratis & numero,habeat tres æſtimationes ueras, non tamẽ hoc eſt illi propriũ,& mea nihil refert de numero dicere, modo ſcias,quòd omnia primitiua , habent duo deriuatiua diuerſi generis, & quòd capitula primitiua cõpoſita,ad minus reduci nequeũt quàm 18,igitur cõtracto numero,quantumuis erunt deriuatiua ſaltẽ 36, nã capitula,rerũ ęq̃lium numero & cubo,& q̃dratorum ęq̃lium cubo & numero,neceſſario ſunt duplicata,manifeſtum eſt eñ,quantũ una ęſtimatio ab alia differat. Oblato igit̃ capitulo,ex tribus aut quatuor denominationibus cõſtante,ſi non adſit numerus,primo oẽs denominationes per minorẽ deprime,ita ut minor in numeꝝ euadat,deinde accipe inferiorẽ denominationẽ,& uide ſi conſtat capitulũ,ex tribus denominationibus,an minor ſit radix maioris q̃drata uel cubica , uel ꝙ radix minoris q̃drata,ſit ꝶ cubica maioris , tunc quæres æſtimationẽ in cõſimili capitulo ex 16,deinde eius ęſtimationis,accipe talẽ radicẽ, q̃lis eſt denominatio minor,cõparata ad minorem,una unius ordinis ad reliquã,& ad facilitatẽ. Diſpoſui deriuatiua oĩa , in directo ſuorũ primitiuoꝝ,in capitulo 2º,etiã conſtantia ex q̃tuor denominationib⁹, in quibus ſi bene aduerteris , ſemper minor denominatio,id eſt, infe-

M rior

rior poſt numerum, eſt radix quadrata unius, & ℞ cubica alterius, denominationis eiuſdem capituli. Exemplum. Igitur ſi quis dicat,

1m. Quad' q̄d' p: 2 q̄dratis, equantur 10, uides quòd eius primitiuū eſt quad' & res, æqualia numero, quęre igitur æſtimationem q̄d'' p: 2 rebus, æqualis 10, & eſt ℞ 11 m: 1, & quia res eſt ℞ quadrata q̄drati, dic quòd æſtimatio eſt ℞ v: ℞ 11 m: 1.

2m. Cu' q̄d', p: 2 cu', æquatur 10, eius primitiuum eſt etiam quad' p: rebus, æqualia numero, cum igitur q̄d' & 2 res, æquantur 10, æſtimatio rei eſt ℞ 11 m: 1, cum igitur res ſit ℞ cubica cubi, minor ſcilicet denominatio minoris, erit æſtimatio quæſita ℞ v: cub' ℞ 11 m: 1.

3m. Quadm relati primi, & 2 rel' prima ęquantur 10, uides quòd relatum eſt ℞ q̄drata, q̄drati relati primi, dic igitur hoc eſſe deriuatiuum ex genere quadrati, ſi igitur q̄d' & 2 res, æquantur 10, æſtimatio eſt ℞ 11 m: 1, igitur cū res ſit ℞ relata relati, dices quòd æſtimatio quæſita, eſt ℞ relata v: ℞ 11 m: 1.

4m. Cubus q̄d'' p: 3 q̄d' q̄dratis, æqualis eſt 20, tunc uides, quòd eius primitiuum eſt cubus & quadrata, æqualia numero, cum igitur cubus & 3 q̄drata æquantur 20, æſtimatio rei eſt 2, & quia quadratum eſt radix quadrata, q̄d' q̄drati, ideo æſtimatio rei erit ℞ 2.

5m. Cubus quadrati p: 3 q̄d' q̄dratis, p: 10, æquatur 15 quadratis, uides quòd eius primitiuum in tabula, uel ex ratione dicta, eſt cubus & quadrata & numerus, æqualia rebus, ideo quære æſtimationem cubi & 3 q̄d' & 10, æqualium 15 rebus, quæ eſt 2, & quia res eſt radix quadrata, quadrati, ideo dices quòd æſtimatio erit ℞ 2.

6m. Cubus cubi & 3 cu' q̄dta, & 10, æquantur 15 cubis, dices ut prius, primitiuum eſſe cubum & quadrata & numerum, æqualia rebus, igitur ſi cubus & 3 quadrata & 10, æquantur 15 rebus, res eſt 2, & quia res eſt ℞ cubica cubi, ideo dicemus quòd æſtimatio erit ℞ cubica 2, & quia primitiuum habet duas æſtimationes, ut notum eſt, totidem etiam habebit deriuatiuum, & utriuſq; ℞ cubica in hoc exemplo & quadrata in præcedenti, ſatisfaciet, & hoc eſt generale omnibus deriuatiuis, ut habeant totidem æſtimationes, quot ſua primitiua.

7m. Sit etiam cubus cubi æqualis 3 cubis quadrati & 16, tunc quia ducta ℞ cubi q̄ti quæ eſt cubus, in cubū quadrati, fit cubus cubi, ideo res erit in capitulo deriuatiuo generali, & eius primitiuum erit, cubus æqualis quadratis & numero, ſi igitur cubus æqualis ſit 3 quadratis p: 16, æſtimatio rei erit 4, quia igitur quadratum minor denominatio in ſecunda æquatione, eſt ℞ cub. cubi quadrati, ideo dico, quòd ſumenda erit ℞ cub. 4, pro æſtimatione. Et ita de alijs.

Et

Et ſimiliter dices, de cubo cubi & cubo, nam poteſt referri ad rē & cubum, ut enim res eſt ℞ cubica cubi, ſic cubus eſt ℞ cu: cub cubi. Poteſt & referri ad quadratū, & cubum quadrati, nam ex utraqꝫ in ſuam radicem, producitur compar denominatio, nam ex quadrato in rem, fit cubus, & ex cu'q̄drati in cubum, fit cubus cubi, ſed prior modus eſt facilior. 8ª.

De capitulis imperfectis & particularibus. Cap. XXV.

Regulæ hæ, dicuntur generales, & hoc duabus de cauſis, prima, q̄a modus in ſe generalis eſt, quamq̄ꝫ repugnet naturæ æſtimationis, ut ſit uniuerſalis, uelut ſi quis dicat, omnis numerus productus ex aliquo in ſe ducto, quadratus eſt, regula eſt generalis, nec tamen ſequitur, quod per hanc regulam, cognoſcam omnem numerum quadratum, quia non licet cognoſcere omnem numerum, qui ex alio in ſe ducto producitur. Dicitur & generalis regula, quia exhaurit æſtimationis genus uniuerſum, quamq̄ꝫ æſtimatio non exhauriat regulam, particulares tamen ſunt regulæ, quia non omnem propoſitam quæſtionē per illas ſoluere poſumus.

Cum igitur cubus æqualis eſt rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum una in alterius radicem, fiat numerus æquationis, tunc adde quartam partem eius partis, cuius ſumenda eſſet radix, alteri parti, & ℞ aggregati, addito dimidio ℞ partis, cuius aſſumpſiſti radicem, eſt æſtimatio rei. 1ª.

Exemplum. Cubus æqualis ſit 20 rebus & 32, tunc ex 16 in ℞ 4, fit 32, igitur addo 1 quartam partem 4, ad 16, fit 17, cuius ℞ p: 1, dimidio ℞ 4, eſt rei æſtimatio, quare res eſt ℞ 17 p: 1.

1 cub. æq̄lis 20 reb⁹ p: 32
16 — 4
℞ 17 p: 1

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inueneris duos numeros, producentes numerum æquationis, quorum unus ſit ℞ aggregati, ex altero & numero rerum, ille qui eſt ℞, eſt rei æſtimatio. 2ª.

Exemplum. Cubus æquatur 24 p: 32 rebus, & ſunt duo numeri, producentes 24, qui ſunt 6 & 4, quorum 6 eſt ℞ aggregati, ex 32 numero rerum, & 4 alio producente, nam 6 eſt ℞ 36, igitur 6 eſt rei æſtimatio.

cub⁹ æq̄lis 24 p: 32 reb⁹
6 — 4 — 32
36
6

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum utraqꝫ in alterius radicem mutuo, fiat dimidium numeri æquationis, radices illarum partium, cōſtituunt iunctæ, rei æſtimationem. 3ª.

Exemplum, Cubus æquetur 10 rebus p:24, & ex 10 fiunt duæ partes, 9 & 1, ex quarum mutua unius in ℞ alterius multiplicatione fiunt 9 & 3, qui iuncti faciunt 12, dimidiũ 24, igitur radices 9 & 1, quæ ſunt 3 & 1, iunctæ, conſtituunt 4, rei æſtimationem.

cub⁹ æq̃lis 10 reb⁹ p:24
9 — 1   12
3 ✕ 1
12

4ª. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerũ feceris tres partes proportionales, ex quarum ductu mediæ in aggregatum, radicum primæ & tertiæ, fiat numerus æquationis, ſeu ex tertia in ℞ primæ, & primæ in ℞ tertiæ, quod idem eſt, tunc tale aggregatum dictarum radicum, eſt rei æſtimatio.

Exemplum. Cubus ęquatur 19 rebus p:30, & ex 19 fiunt tres partes proportionales, 9, 6, 4, ex quarum ſecunda, quæ eſt 6 in 5 aggregatum radicum primæ & tertię, fit 30, ideo 5 aggregatum radicum, eſt rei æſtimatio.

cub⁹ æq̃lis 19 reb⁹ p:30
4 — 6 — 9
2 ⁄ ⁀ ∖ 3
12 —— 18 — 30

5ª. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inueneris duos numeros, quorum aggregatum, ductum in productum unius in alterum, producat tertiam partem numeri æquationis, & quadrata illorũ æqualia fuerint aggregato ex numero rerum, & producto unius in alterum, tunc aggregatum illorum numerorum, eſt rei æſtimatio.

Exemplum. Cubus æquetur 7 rebus p:90, & 3 & 2 ducti inuicem producunt 6, qui ductus in 5, aggregatum, producit 30, tertiam partem 90, differentia uero 13, aggregati quadratorum, ab ipſo 6, producto unius in alterum, eſt 7, numerus rerum, ideo 5, aggregatum illorum, eſt rei æſtimatio.

cub⁹ æq̃lis 7 reb⁹ p:90
9   3
4   2   6 — 7 — 13
13   5 / 30

6ª. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inuentus fuerit numerus cubicus, cuius ℞ cubica, ducta in numerum rerum, producat aggregatum ex numero cubico inuento, & numero æquationis, ſeu illorum differentiam, tunc res p: eadem ℞ cubica, erit communis diuiſor cubi, p: eodem numero cubico, & numeri rerum cum numero aggregato, ex numero æquationis, & numero cubo, uel res m: ℞ cubica eadem, erit communis diuiſor, cubi m: numero cubo inuento, & numęri rerum m: differentia numeri ęquationis, & numeri cubi inuenti, inde peruenies ad rei æſtimationem.

Exemplum. Cubus æquatur 16 rebus p: 21, tunc quia addito

27 numero cubo, ad 21 fit 48, qui producitur ex 3 ℞ cubica 27, in 16 numerum rerũ, ideo dico, quod res p: 3, erit cõmunis diuiſor, addito 27 utriq; parti, ſcilicet cubo & 16 rebus p: 21, inde facta diuiſione, habebis quadratum m: 3 rebus p: 9, æqualia 16, quare q̃dratum æq̃bitur 3 rebus p: 7, & res erit ℞ 9 $\frac{1}{4}$, p: 1 $\frac{1}{2}$, Et ſimiliter, ſi dicamus, cubus ęquať 4 rebus p: 15, hic abiecto 15 ex 27 numero cubo, differentia quæ eſt 12, continet 4, numerum rerum, in 3, radice cubica 27, ideo dico, quod abiecto communi 27, ex

cub⁹ æq̃lis | 16 reb⁹ p: 21
3 · 27
48 48
1 res p: 3
cub⁹ p: 27 | 16 res p: 48

utraq; parte, fiet cubus m: 27, æqualis 4 rebus m: 12, inde diuiſis ambobus per rem m: 3, communem diuiſorem, fiet quad. p: 3 rebus p: 9, æquale 4, quare æquatio nulla ſequetur, quamuis perueneris ad modum æquandi, in detractione, niſi forſitan aliquando per m: ſyncerum.

cubus æq̃lis 4 reb⁹ p: 15
3 —— 27
12 12
1 res p: 3
cub⁹ m: 27 | 4 res m: 12

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerum auferatur $\frac{3}{4}$ quadrati rei, & ℞ reſidui addatur, aut minuatur, ex dimidio rei, aggregatum ductum in quadratum reſidui, & reſiduum ductum in quadratum aggregati, producunt numerum æquationis. 7ª.

Exemplum. Cubus æquatur 14 rebus p: 8, & rei æſtimatio eſt 4, cuius q̃dratum eſt 16, huius $\frac{3}{4}$ ſunt 12, abijce ex 14 numero rerum fit 2 reſiduũ, cuius radicem adde, & minue ex 2, dimidio 4, æſtimationis rei, fiunt 2 p: ℞ 2, & 2 m: ℞ 2, dico igiť quod ex uno in quadratum alterius mutuo fiunt 8 ſcilicet numerus æquationis.

cubus æqualis 14 rebus p: 8
res 4 quadratum 16
$\frac{3}{4}$ q̃drati 12 — 14 — 2
2 p: ℞ 2 >< 6 p: ℞ 32
2 m: ℞ 2 6 m: ℞ 32
8

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & diuiſeris dimidium numeri æquationis, per rei æſtimationem, addideriſq; prouentum numero rerũ, & ab aggregato detraxeris $\frac{3}{4}$ quadrati ipſius rei, ℞ reſidui, addita & detracta, à dimidio æſtimationis, oſtendit partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius mutuo, producitur dimidium numeri æſtimationis. 8ª.

Exemplum. Cubus æquatur 14 rebus p: 8, & æſtimatio eſt 4, diuide 4 dimidium 8, per 4, æſtimationem exit 1, adde ad 14 fit 15, abijce 12, qui ſunt $\frac{3}{4}$ quadrati æſtimationis, relinquitur 3, cuius radicẽ adde ac minue, ex 2 dimidio æſtimatiõis, habebis 2 p: ℞ 3, & 2 m:

℞ 3,ex quorum ductu unius,in quadratum alterius mutuo,fit 4 dimidium numeri æquationis.

cubus æq̄lis 14 rebus p: 8

1 —— 4 —— 4

15 — 12 — 3

2 p: ℞ 3 | 2 m: ℞ 3

7 m: ℞ 48 | 7 p: ℞ 48

2 | 2

9ª. Cum fuerint res æquales cubo & numero,& inueneris numerum,qui ductus in ℞ aggregati,ex ipſo & numero rerū, producat numerum æquationis,tunc dimidiæ eius ℞,addita uel detracta radici differentiæ numeri æquationis,& $\frac{3}{4}$ eiuſdem aggregati,conſtituit rei æſtimationem.

Exemplum. Cubus p: 12 æquatur 34 rebus,tunc quia addendo 2 ad 34, productum ex ipſo 2,in 6 ℞ 36 aggregati 2,& 34 eſt 12 numerus æquatiōis, ideo dico,quod ſi ad 3, dimidiū radicis 36 addatur uel minuatur ℞ 7 differentiæ 34 numeri æquationis & 27 , quod eſt $\frac{3}{4}$ q̄drati 6,ſeu talis aggregati, quod conſurget rei æſtimatio, 3 p: ℞ 7,uel 3 m: ℞ 7.

cub⁹ & 12 æq̄lis 34 rebus

2

36

12 — 2 — 6

34 3

27

7

10ª. Cum fuerint res æquales cubo & numero , & ſubtraxeris talem numerum ex numero æquationis,ita quod ℞ cuba differentiæ,ducta in numerum rerum,producat numerum detractum,tunc res m: ℞ cubica differentiæ,erit communis diuiſor,facta detractione , & hæc regula ſimilis eſt ſextæ,ſicut præcedens ſecundæ.

Exemplum. 16 res æquantur cubo & 21,detracto 48,relinquitur 27,cuius ℞ cubica 3,ducta in 16 numerum rerū, producit 48,igitur detracto 48,ex utraque parte,fient cubus m: 27 , & 16 res m: 48 , inde diuiſor communis erit res m: 3,& prouenient quadratum & 3 res & 9,æqualia 16,quare quadratum & 3 res,æquabuntur 7,& rei æſtimatio erit,℞ $9\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$.

cubus & 21 æq̄lis 16 reb⁹

48

27 —— 3

48

res m: 3

cub⁹ m: 27 | 16 res m: 48

11ª. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & ex numero rerum feceris tres partes proportionales,ex quarum ſecunda,ducta in differentiam radicum primæ & tertiæ,ſeu ex ductu primæ in ℞ tertiæ, & tertiæ in ℞ primæ,differentia æqualis fuerit tertiæ parti numeri æquationis,erit differentia illarum radicum rei æſtimatio,& eſt ſimilis 4ª.

Exemplum. 19 res æquales ſunt cubo & 18 , cum ex 19 factæ fuerint tres partes proportionales 4, 6, 9, ex quarum media 6 ducta in

in differentiam radicum 9 & 4, quæ eſt 1, fiat 6, tertia pars 18 numeri æquationis, ideo dico quòd 1 differentia talium radicum eſt rei æſtimatio.

cub^e & 18 æq̄les 19 reb^9
9 6 4
. 3 1 2
6 — 3 — 18

Cum fuerint res ęquales cubo & numero, & cum ℞ cubica numeri æquationis, diuiſeris numerum rerum, & de eo quod exit, feceris duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat numerus æquationis, tunc quantitas proportionalis, inter ℞ cubicam numeri æquationis, & partem, quam ducis in q̄dratum alterius, ut fiat æquationis numerus, eſt rei æſtimatio. 12ª.

Exemplum. 18 res æquantur cubo p: 8, diuiſo 18 per 2 ℞ cubam 8, exit 9, ex quo fiunt duę partes 8 & 1, ex quarum una quæ eſt 8, in quadratum alterius quod eſt 1, fit 8, numerus ęquationis, ideo 4 numerus proportionalis inter 8, partē 9, quam duxiſti in quadratum 1, alterius partis, & 2 ℞ cubam 8 numeri æquationis, eſt rei æſtimatio.

18 res æquales cubo p: 8
2 — 2
9 — 1 — 8
1 8 4

Cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, & ex tertia parte numeri rerum, feceris duas partes, quæ ductæ in ſuas radices, producant duos numeros, qui iuncti, æquales ſint dimidio numeri æquationis, aggregatum illarum radicum, eſt rei æſtimatio, & eſt ſimilis tertiæ regulæ. 13ª.

Exemplum. 15 res, æquantur cubo & 18, capio 5, tertiam partem 15, ex quo facio duas partes, 4 & 1, quæ ductæ in ſuas radices, 2 & 1, producunt 8 & 1, quorum aggregatum 9, eſt dimidium 18 numeri æquationis, ideo dico, quod 3, aggregatum talium radicum, eſt rei æſtimatio. Et iam ſcis, etiam ex regula generali, quòd quotiens ex numero rerum poſſunt fieri duæ partes, quarum una ducta in alterius radicem, producatur numerus æquationis, quòd talis ℞ eſt rei æſtimatio, & quòd hoc poteſt eſſe duobus modis, & quomodo cadat in Binomio uel reciſo & integris, ideo quamuis eſſent ſimiles primæ regulę, quia tamen ex capitulo generali, quaſi uiolenter in eam rapimur, ſatis fuerit admonuiſſe hic.

15 res ęquales cubo p: 18
5
1 — 4
1 — 2 — res 3
1 — 8 — 9 — 9

Cum fuerit numerus æq̄lis cubo & quadratis, & ſciueris ex numero quadratorum facere duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum 14ª.

dratum alterius,fiat numerus ęquationis,tunc duces partem quę non in ſe ducitur, in aggregatum eius quæ in ſe ducitur,& quartæ partis eius,quæ non in ſe ducitur,producti ℞,detracto dimidio partis,quæ non in ſe ducitur, eſt rei æſtimatio.

Exemplum. Cubus & 20 quadrata, æquantur 72, ex 20 fiunt duæ partes, 18 & 2, & ex una in quadratũ alterius fit 72, nam ex 18 in 4 fit 72, dico, quòd ſi 18, ducatur in 6 ½ aggregatũ ex 2 reliqua parte, & 4 ½, quarta parte ipſius 18, fiet 117, cuius ℞, detracto 9, dimidio 18, oſtendit æſtimationem rei ℞ 117 m: 9.

cub⁹ & 20 q̃drata æq̃lia 72
2 18
4 ½
2
6 ½ —— 18 — 117
℞ 117 m: 9

15a. Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, & inueneris numerum non minorem quarta parte numeri quadratorum, nęc maiorem tertia parte, cum quo diuiſo numero æquationis, proueniat numerus quadratus, cuius radicis dimidium additum numero quadratorum, faciat quadruplum ipſius diuiſoris, tunc æſtimatio rei eſt duplum numeri diuiſoris, p: uel m: radice producti, ex quadruplo diuiſoris, in differentiam numeri rerum, & tripli ipſius diuiſoris.

Exemplum. Cubus p: 48 æquatur 10 quadratis, tunc quia 3, qui non eſt minor quarta parte 10 numeri quadratorum, nec eius tertia parte maior, diuidẽs 48 producit 16, cuius medietas radicis quæ eſt 2, addita ad 10 numerum quadratorum, conſtituit 12, quadruplum diuiſoris 3, ideo dico, quòd ſi duplo diuiſoris quod eſt 6, addatur uel detrahatur ℞ producti, ex 12 quadruplo 3 diuiſoris, in 1, differentiam 10 numeri rerum, & 9, tripli 3, diuiſoris, & eſt tale productum etiam 12, quod conſtituemus utramq; æſtimationem, 6 p: ℞ 12, uel 6 m: ℞ 12.

10 quad. æq̃l. cubo & 48
3 3
4 4 —— 16
12 2 — 10 — 12
6 p: ℞ 12 uel 6 m: ℞ 12

Notª. Et ſcias, quòd per capitula cognoſcuntur regulæ & quæſtiones ſuper his formatę cum facilitate, quæ aliàs uix ſoluerentur, ipſæ uero regulæ ſumptæ ſunt ex demonſtrationibus capituli ſexti, & ego non appoſui eas, quia intelligenti noſtros libros ſuper Euclidem, ſunt per ſe manifeſtæ, & non intelligens nõ curabit illas, nec quæret, quoniam non ſunt ei neceſſariæ.

16a. Operæpretium fuerit nunc oſtendere, quòd hæ regulæ non poſſunt eſſe generales, reſpectu æſtimationis, & modus in uno ſufficiet

ad

ad oſtendendum in reliquis capitulis. Capiamus igitur capitulũ proximius, & de quo magis poſſet hoc credi, propter multiplicem ęſtimationem, & ſit cubus p: numero, æqualis 7 quadratis, & ſit $2\frac{2}{3}$ numerus poſitus, id eſt numerus, qui primo cognoſcitur in ſexto capitulo, regula ſecũda, erit igitur ex illa regula, rei æſtimatio, ℞ 16 p: $2\frac{2}{3}$, q̃re $6\frac{2}{3}$, quare reſiduũ ad numerum q̃dratorũ eſt $\frac{1}{3}$, quare ex demonſtratione poſita in initio tertij libri, productũ $6\frac{2}{3}$, in q̃dratũ $\frac{1}{3}$, eſt numerus fractus, & eſt $\frac{20}{27}$, & econtra, ducto $\frac{1}{3}$ in q̃dratum $6\frac{2}{3}$, fit fractus numerus etiam, ſcilicet $14\frac{22}{27}$, quare poſito numero quadratorum integro, & æſtimatione fractis numeris conſtituta, numerus æquationis, qui eſt ſuperatio partium, quæ ſunt rationales, quadratorum ad cubum, nunq̃ poterit eſſe numerus integer, ſed talis æquationis numerus producitur ex una parte numeri rerum, in alterius quadratum. Hoc oſtenſo, Capio cubum & numerum æquales 7 quadratis, manifeſtum eſt autem ex demonſtratis in ſeptimo ſuper Euclidem, & ex regulis ſexti libri, deducendo numerum ad quadratum & cubum, quod maxima productio partiũ 7 in quadratum alterius, eſt $50\frac{22}{27}$, igitur poterit diuidi 7, ut producat numeros integros, per multiplicationem unius partis in quadratum alterius, ab 1 uſq; ad 50, & non in fractos, ex demonſtratis igitur in integros, at in integris non poteſt fieri niſi triplex diuiſio, ut patet in figura, nec produci plus quàm 6, 20, 36, 48, 50, igitur reſidui 45 numeri, nullo modo per genus huius æſtimationis exhauriri potuerunt, particularis igitur eſt, ac ualde etiam particularis, nec tamen credas, quòd in alijs capitulis, numerus pro Binomij aut reciſi altera parte non poſsit inſeruire, ut ſæpius in exemplis docuimus.

	7		
1	6,	36,	6.
2	5,	50,	20.
3	4,	48,	36.

Cum fuerit cubus ac numerus æqualis rebus, & ex ℞ numeri rerum feceris duas partes, ex quarum ductu primæ in duplum quadrati ſecundæ, & ſecundæ in quadratum primæ, fiat numerus æquationis, tunc ſecunda pars erit rei æſtimatio. 17a.

Exemplum. Cubus & 48, ęquantur 25 rebus, tunc quia ex 5, ℞ 25, fiunt partes 3 & 2, ex quarum ductu 2 in 18 duplum quadrati 3, & ex 3 in 4 quadratum 2, fit 48, ideo dico, quod 3 pars, cuius quadratum duplicatur, eſt rei æſtimatio.

cub⁹ & 48 æqualis 25 reb⁹
2 ✕ 3 — 5
4 18
12 — 36
48

Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, & duo numeri differentes in numero æquationis, ducti inuicem, produxerint tan- 18a.

tum, quantum ex cubo τpq̃d. in cubum differentiæ ℞ cubicarum talium numerorum, tunc differentia talium ℞ cubicarum, eſt rei æſtimatio, ut in exemplo à latere patet, res enim facilis eſt.

cubus & 22 $\frac{1}{2}$ q̃d. æq̃l. 98
3375 —— 125 —— 27
98
7 $\frac{1}{2}$ 5 —— 3
421 $\frac{7}{8}$ —— 8
3375

Oſtendit regulas maiores, quæ ſunt omnino ſingulares. Caput XXVI.

P[a]. QVando quadratum quadrati & res, æquantur quadratis & numero, & diuiſo numero rerum ac numero æquationis, per numerum quadratorum, dimidium exeuntis ex numero rerum, fuerit radix prouentus numeri æquationis iam diuiſi, tunc accipe ℞ numeri primi æquationis, & ei adde quartam partem numeri quadratorum, & totius accipe radicem uniuerſalem, à qua minue ℞ eiuſdem quartæ partis numeri quadratorum, reſiduum eſt rei æſtimatio.

Queſt. Exemplum. Quatuor iniere ſocietatem. Primus poſuit quantitatem. Secundus poſuit quadratū quadrati decimæ partis primi. Tertius poſuit quintuplum quadrati decimæ partis primi. Quartus poſuit quinq̧, & tantum poſuit primus cum ſecundo, quantum tertius cum quarto, Quæritur quantū quiſq̧ poſuerit? Pone quòd primus poſuerit 10 res, ſecundus poſuit igitur quadratum quadrati, tertius 5 quadrata, quartus autem ut dictum eſt, poſuit 5. Igitur quadratum quadrati, & 10 res, æquantur 5 quadratis & 5, diuidendo igitur numerum rerum per numerum quadratorum, exiret 2, cuius dimidium eſſet ℞ 1, qui prouenit diuiſo 5 numero æquationis, per 5 numerum quadratorum, igitur accipe ℞ 5 numeri æquationis, cui adde quartam partem numeri quadratorum, & fiet ℞ 5 p: 1 $\frac{1}{4}$, cuius accipe ℞ v: quæ eſt ℞ v: ℞: 5 p: 1 $\frac{1}{4}$, & ab ea minue quartam partem numeri quadratorum, habebis rei æſtimationem ℞ v: ℞ 5 p: 1 $\frac{1}{4}$ m: ℞ 1 $\frac{1}{4}$, & habebunt ut uides.

p[a] ℞ v: ℞ 50000 p: 125 m: ℞ 125
2[a] 17 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 500 m: ℞ v: ℞ 612500 p: 781 $\frac{1}{4}$
3[a] 12 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 125 m: ℞ v: 78125 p: 156 $\frac{1}{4}$
4[a] 5

2[a]. Eodē modo, ubi q̃d' q̃d^m, æquetur eiſdem conditionibus q̃dratis rebus & numero, regula tenebit ſimilis, & in æſtimatione erit idem modus, niſi quòd in fine addemus ℞ quartæ partis numeri qua-

quadratorum,radici uniuerſali,quam in præcedente regula detrahebamus,ut in exemplo,ſi q̄d'q̄d^m æquale foret 5 quadratis, 10 rebus & 5 numero,rei æſtimatio eſſet ℞ v:℞ 5 p: 1 ¼,p:℞ 1 ¼.

Et cauſa in his regulis eſt,q̄d ℞ q̄d'q̄drati,eſt q̄dratum,& ℞ 5 q̄dratorum m: 10 rebus p: 5,eſt ℞ 5 m:℞ 5 quadratorum,ſeu m: rebus ℞ 5,igitur quadratum & res ℞ 5,æquantur ℞ 5,& æſtimatio eſt nota,quæ eſt eadem cum illa,q̄d'q̄d^ti,p: 10 rebus, æqualium 5 quadratis & 5,& eadem ratione,ſi q̄d'q̄dratum æquale eſt 5 q̄dratis, 10 rebus & 5,erit quadratum æquale rebus ℞ 5 p:℞ 5,quare nota eſt res.

Quando quadratum quadrati & quadrata eſt res, æqualia fuerint cubis & numero,qui ſit 2 p:numero quadratorum,fuerintq́ numerus rerum & cuborum idem,& dimidium numeri rerum,radix numeri,tunc duc in ſe quartam partem numeri rerum, & producto adde 1,& ab hoc minue ℞ aggregati ex quadrato dimidij numeri rerū & unitate,& reſidui ℞ adde uel minue à quarta parte numeri rerum, quod fiet,erit rei æſtimatio. 3ª.

Exemplum. Quad'q̄dratum & 34 quadrata & 12 res,æquantur 12 cubis & 36,tunc uides quòd cubi ſunt æquales rebus in numero, & dimidium numeri rerum eſt ℞ 36 numeri,& numerus ipſe eſt 2 p: numero quadratorum,ideo duc 3 quartam partem 12 numeri rerū in ſe,fit 9,adde 1 pro regula,fit 10,abijce ℞ 37 aggregati ex quadrato dimidij numeri rerum & unitate,fit 10 m:℞ 37,huius ℞ uniuerſalem minue uel adde 3,quartæ parti numeri rerum,habebis æſtimationem rei,3 p:℞ v: 10 m:℞ 37,uel 3 m:℞ v: 10 m:℞ 37.

Et modus inueniendi tales regulas habetur ex regula magna,unde etiam capitulo huic nomen dedimus,& eſt,ut ſoluas aliquam quæſtionem ſimpliciter,deinde per regulam magnam,uel etiam aliam, deinde obſeruabis conditiones neceſſarias,in tranſitu ex una in aliam, poſtmodum obſerua,quo modo perueneris ad rei æſtimationem, & facies regulam nonam hoc modo ſuper capitulum ignotum. 4ª.

Exemplum. Fac ex 6 duas partes,ita quòd cubus minoris,& quadratum maioris,& productum ex eadem maiore in 8,hæc tria producta,ſint proportionalia,dico peruenies per regulam magnam ad hoc quòd proportio talium partium erit ℞ cub. 8,ſcilicet 2,quare diuidemus 6,per ℞ cub. 8 p: 1,& exibit rei æſtimatio, at ſequendo poſitionem,habebimus 1 q̄d q̄d^m p: 24 q̄dratis p: 144,æqualia 8 cub. p: 96 poſitionibus. Dicemus igitur,quando q̄d'q̄d^m & q̄drata & numerus, æquantur cubis & rebus,& potuerimus inuenire numerum aliquem, qui ductus in numerum æquationis,producat numerum cuius ℞ du

6

1 poſ: | 6 m: 1 poſ:

1 cu. | 36 p: 1 q̄d' m: 12 poſ: | 48 m: 8 poſ:
48 cub. m: 8 q̄d' q̄d. æquales 1296. p: 1
q̄d' q̄d p: 216 q̄d. m: 24 cub. m: 864 poſ:

72 cub. p: 864 poſ: æquales 9 q̄d' q̄d. p:
216 q̄d. p: 1296

8 cub. p: 96 poſ: æquales 1 q̄d' q̄d. p: 24
q̄d. p: 144.

cta per 6, pro regula, producat numerum, qui diuiſus per primum numerum, quem multiplicaſti, producat numerum quadratorum, tunc ſi ipſi primo numero iã dicto, quem multiplicaſti in numerum æquationis, addas 3 pro regula, & ducto in ℞ radicis numeri quem iam ab initio produxiſti, proueniat numerus, qui diuiſus per numerum primum inuentum, producat numerum cuborum, & numerus rerum ductus per primum numerum, fuerit quadruplus cubo eius ℞'℞, tunc dico, quòd detracto 1, pro regula à primo numero quem multiplicaſti, & reſidui ſumpta ℞ cubica, & ei addita etiam unitate pro regula, & cum aggregato diuiſa tali ℞'℞, quod prouenit, eſt rei æſtimatio. Et cauſa in hoc eſt, quòd in tali quæſtione, numerus q̄d' q̄d", prouenit ex multiplicando, unitate addita, numerus cuborum, ex diuidendo in multiplicandum, p: 4, numerus quadratorum uero, ex ſexcuplo quadrati diuidendi, numerus rerum ex quadruplo cubi diuidendi, numerus æquationis eſt q̄d' q̄drati diuidendi. Diuidendum uoco in hac quæſtione 6, multiplicandum autem 8. Exemplum, q̄d' q̄dratum p: 6 quadratis p: 4, æquatur $3\frac{1}{2}$ cubis p: 8 rebus, pone primũ numerum q̄dratum, duc in 4, fiunt 4 q̄drata, huius ℞ eſt 2 res, duc in 6 ex regula, fiunt 12 res, quas diuide per quadrata, exit quod æquatur 6, igitur 6 quadrata, æquantur 12 rebus, res igitur eſt 2. Nos autẽ in poſitione poſuimus quadratum, igitur numerus primus ſeu multiplicandus erit 4, & cum cæteræ conditiones conueniant, quæ dictę ſunt, erit 2 numerus diuidendus, quo diuiſo per ℞ cub. 3 p: 1, exibit æſtimatio rei, & de hoc diximus capitulo ſexto.

De tranſitu capituli particularis in capitulum particulare. Caput XXVII.

1°. FIt etiam tranſitus capituli ſingularis in ſingulare, hoc modo, cubus, & 2 quadrata, & 56, æquantur 41 rebus, & rei æſtimatio una eſt 3 p: ℞ 2, quæro in eadem æſtimatione, cubus cum 7 quadratis, quot rebus æquabitur? & cũ quo nume-

numero: duc differentiam numeri quadratorũ, quæ eſt 5, in duplum partis, quæ eſt numerus in æſtimatione, ſcilicet in 6, fit 30, cui adde 41 numerum rerum, fit 71, numerus rerum, deinde duc partes æſtimationis in ſe, fiunt 2 & 9, quorũ productorum differentiam, quæ eſt 7, duc in 5, differentiam numeri quadratorum, fit 35, quem adde ad 56, quia 3 eſt maior ℞ 2, fit numerus æquatiõis 91, igitur cubus & 7 quadrata & 91, æquantur 71 rebus, æſtimatione exiſtente 3 p: ℞ 2, & ubi ℞ fuiſſet maior numero, detraxiſſes 35 à 56 & remanſiſſet numerus 21.

cub. & 2 q̃d. & 56, æq̃l. 41 reb.	
cubus & 7 q̃d	æſtimatio rei
5	3 p: ℞ 2
6	9 — 2
30	7
41	5
71 res	35
	56
numerus	91

Dico etiam, quod non licet tranſire à capitulo in capitulum, ſtante eodem genere denominationum, & quod æſtimatio rei ſit eadem, & non rationalis, id eſt, non numerus integer, aut fractus. Exemplum ſit cubus p: 3 rebus, æqualis 10, æſtimatio rei eſt ℞ v: cubica ℞ 26 p: 5 m: ℞ v: cubica ℞ 26 m: 5, dico quòd ſub hac æſtimatione, non poterit cubus cum aliquibus rebus æquari ulli numero, uſq; in infinitũ, nam ſit (gratia exempli) cubus p: 9 rebus, ęqualis 18, quia igitur res eſt eadem, ℞ cubica ſcilicet dicta, erit cubus idem in utroq; permutatim. Igitur ex tertio libro, cub. cub. p: 9 rebus p: 10, ęquatur cubo p: 3 rebus p: 18, abijcio communem cubum, fient 9 res p: 10, æquales 3 rebus p: 18, igitur 6 res æquantur 8, igitur æſtimatio rei eſt $1\frac{1}{3}$, numerus rationalis, & nõ ℞ cubica dicta, quod eſt contra ſuppoſitum. 2°.

cub. p: 3 reb. æq̃l. 10	
cub. p: 9 reb. æq̃. 18	

Similiter nec plures cubi cum pluribus rebus, æquabuntur alicui numero, ſtante eadem æſtimatione, patet ex præcedenti, nam diuiſis omnibus per numerum cuborum, habebimus, ut prius, cubum & res æquales numero, quod iam oſtendi fore impoſsibile. Eadem ratio igitur militat in omnibus, nam ſi dixero cubus æquatur 6 rebus p: 2, uel q̃d. q̃dratum æquatur 6 rebus p: 2, dicam igitur in eadem æſtimatione cubus aut q̃d. q̃dratum nullis rebus & numero rationalibus æquari poteſt, dico rationalibus, quia non prohibet, quod aſſumptis aut rebus aut numero irrationalibus æquatio non ſequatur. 3°.

Et ex hoc ſequitur etiam, quòd in cæteris regula tenet denominationibus, ubi æſtimatio rei non ſit nec numerus rationalis, nec ℞ ſimplex ex genere mediæ denominationis. Exemplum, 2 cubi & 10, 4°.

æquantur 1 q̄d'q̄drato & rei, æſtimatio non eſt nec numerus, nec ℞ cubica ſimplex alicuius numeri rationalis, dico quod q̄d'q̄dratum ſub eadem æſtimatione, nullis cubis ac numero æquari poterit, patet, quia facta tranſmutatione, & abiecto q̄d'q̄drato, relinquentur cubi ęquales numero, igitur æſtimatio rei, erit neceſſario ℞ cubica numeri, uel numerus, quod eſt contra ſuppoſitam.

De operationibus radicum Pronicarum ſeu mixtarum & Allellarum. Cap. XXVIII.

1 IAm oſtendimus in ſuperioribus, tres eſſe ſpecies Pronicarum radicum, Minorem, quando radix q̄drata comparatur quadrati ſui & ſuimet aggregato, ipſum autem aggregatum dicetur pronicum minus. Medium, cum cubica radix, comparatur aggregato ex ſe & ſuo cubo, ipſum autem aggregatum dicetur Pronicum medium, ſed maior radix pronica eſt, cum radix radicis alicuius numeri, comparatur aggregato ex ſeipſa & eius numeri, cuius eſt radix radicis, ipſum autem aggregatum dicetur pronicum maius, ut in exemplo. Pronicum maius 3, eſt 84, & 3 eſt radix pronica maior 84. Non contingunt autem his, cum ſint uelut anomala uerba in Grammatica, operationes quæ ſunt communes, neq; poſſunt multiplicari, uel diuidi, addi uel minui, ſed habent propriã quandam operationem, quæ dicitur tranſitus.

2 Cum igitur duxeris pronicum minus, in ſuam ℞ pronicam, productoq; addideris ipſum pronicum, ℞ quadrata aggregati, erit pronicum medium ℞ quadratæ radicis pronicę minoris, ut in exemplo, duco 3 ℞ pronicam minorem 12, in 12, fit 36, addo ei 12, pronicum minus fit 48, huius ℞ (& eſt ℞ 48) eſt pronicum mediũ ℞ 3, quæ fuit ℞ pronica minor 12, nam ducta ℞ 3 ad cubum, fit ℞ 27, cui addita ipſa ℞ 3, producit ℞ 48, igitur ℞ 3 eſt ℞ pronica media ℞ 48, ut propoſitum eſt.

3 Cum duxeris pronicum medium in ſuam ℞ pronicam, producitur pronicum minus quadrati radicis pronicæ mediæ. Exemplũ, duco 3, radicem pronicam mediam 30 in 30 fit 90, pronicum minus 9, quadrati 3, quod fuit ℞ pronica media ipſius 30.

4 Cum pronicum maius in ſe ducitur, & productum diuiditur per quadratum radicis ſuæ pronicæ maioris, quod exit, ad cubum eiuſdẽ radicis pronicæ, eſt uelut 1 quadratum p: 2 poſitionibus p: 1. Exemplum, capio 18 pronicum maius, duco in ſe fit 324, diuido per 4 quadratum

dratum 2, ℞ pronicæ maioris 18, exit 81, quod eſt 1 quadratum p: 2 poſitionibus p: 1, reſpectu 8, cubi 2, eiuſdem radicis pronicæ.

Allellæ dicuntur radices, cum ex multiplicatione mutua duorum numerorum, in quadratum alterius, duo numeri conſurgunt, uelut capio 2 & 3, ipſi dicuntur radices allellæ 12, & 18, nam ex 2 in 9, fit 18, & ex 3 in 4, fit 12, inueniuntur autem radices hoc modo, duc utrunque eorum in ſe, & diuide productum per reliquum, & ℞ cubicæ prouentus ſunt allellæ. Exemplũ, uolo ℞ allellam 4 & 8, duc 8 in ſe, fit 64, diuide per 4 exit 16, duc etiam 4 in ſe, fit 16, diuide per 8 exit 2, igitur ℞ cubica 16, & ℞ cubica 2, ſunt allellæ 4, & 8, & ita allellæ 6 & 18 ſunt ℞ cubica 54, & ℞ cubica 2. 5.

| 4 ⨯ 8
| 16 64
| 2 — 16

Ex quo patet, quòd omnes ℞ allellæ, ſunt ℞ cubicæ numerorũ, ſe habentium in triplicata proportione, in qua ſe habent ſui ſolidi propoſiti priores, & hi ſunt medij proportionales. Corm.

Operationes igitur in his, ex hoc ſunt manifeſtę, nam cum inuentæ fuerint, reducentur ad radices cubicas, cum quibus operaberis rurſus, perfecta operatione, reduces ad allellas. 6.

De regula Modi. Caput XXIX.

Dicitur hæc regula (quia modum exhibet fabricandi regulas quotlibet mercaturæ) Modi, utiliſsima magiſtris Arithmeticæ, ut facilioribus quibuſdam inuentis, artẽ docerent, cuius etiam auxilio, maximam ſexti libri partẽ confecimus. Eſt igitur regula hæc, ſolue quamuis quæſtionem propoſitam, modo quo potes, ſeu poſitione, ſeu auxilio ſexti libri, deinde auferes poſitionem, & regulas alias, & ſerua operatiões, quas quàm potes maxime, ad breuitatem redige, & habebis regulam de modo pro omni conſimili quæſtione.

Exemplum, Serici uiridis paſſus 7, & nigri paſſus 3, ueneunt denarijs 72, & eodem precio ſerici uiridis paſſus 2, & nigri paſſus 4, ueneunt denarijs 52, quæritur precium. Pones poſitionem, eſſe æſtimationem unius paſſus ſerici uiridis, igitur 7 paſſus uiridis ueneunt 7 poſitionibus, quare 3 paſ: nigri ueneunt 72 de: m: 7 poſitionibus, & paſſus ualebit $\frac{1}{3}$ horum, ſcilicet 24 de: m: 2 $\frac{1}{3}$ poſitionibus, & 4 paſſus nigri, ualebũt 96 de: m: 9 $\frac{1}{3}$ poſitionibus, at duo paſſus uiridis ualent 2 poſitiones ex ſuppoſito, igitur 2 paſſus ſerici uiridis & 4 nigri ualent de: 96 m: 7 $\frac{1}{3}$ poſitionibus, & hæc eadẽ æſtimabantur 52 de: igitur

tur de: 96 m: $7\frac{1}{3}$ poſitiõibus, ęquantur 52 de: quare de: 44, qui ſunt differentia 96, & 52, æquabuntur $7\frac{1}{3}$ poſitionibus, igitur poſ: ualet 6 denarios, & tantam ęſtimationem paſſus ſerici uiridis eſſe conueniet, quare 7 paſſus uiridis ueneunt 42 de: & 3 paſſus nigri reliquis de: ad 72, ſcilicet de: 30, quare paſſus unus de: 10, ſerici igitur utriuſque precium habes. Hucuſque poſitione operatus es, nunc uenio ad regulam, dicoque, in talibus diuide paſſus numeroſiores, ſcilicet 7, & numerum de^m: ſcilicet 72, per paſſus pauciores, ſcilicet 3, & quod exit, duc per paſſus poſitos in ſecunda poſitione, correſpondentes paucioribus, & à producto numeri paſſuum, detrahe reliquos paſſus ſecundę poſitionis, & cum reſiduo diuide precij 2 & producti differentiam, exibit æſtimatio paſſus numerioſioris, in prima poſitione.

7		3 D 72
2		4 D 52
7 poſ:		72 m: 7 poſ:
		3
		24 m: $2\frac{1}{3}$ poſ:
		4
		96 m: $9\frac{1}{3}$ poſ:
		2 poſ:
		96 m: $7\frac{1}{3}$ poſ:
		52
		44 m: $7\frac{1}{3}$ poſ:
		$7\frac{1}{3}$
		6

Exemplum, diuide 7 & 72 per 3, exit $2\frac{1}{3}$, & 24 duc per 4, fiunt $9\frac{1}{3}$, & 96, à $9\frac{1}{3}$ abijce 2, à 96 abijce 52, relinquũtur $7\frac{1}{3}$, & 44, diuide 44 per $7\frac{1}{3}$ exit 6, precium paſſus unius ſerici uiridis.

Inde ex hoc breuior regula emergit, ut in tertia figura, diuide 4 per 3, ſcilicet numerum paſſuũ eiuſdem generis ſerici in duabus petitionibus, exit $1\frac{1}{3}$, quem duc in 7, & 72, fiunt $9\frac{1}{3}$, & 96, à quibus abijce numeros ſuprapoſitos ſecũdæ poſitionis, & ſunt 2 & 52, directos à directis, relinquuntur $7\frac{1}{3}$ & 44, diuide numerum denariorum 44 per $7\frac{1}{3}$ numerum paſſuum, exit 6, precium paſſus uiridis ſerici, & ita conſtitues breuiſsimam regulam, ex tam longa poſitionis operatione, unde merito hæc modi regula, mater regularum dici poteſt.

uirid.	nigri	pręcium
paſ: 7	paſ: 3	de: 72
paſ: 2	paſ: 4	de: 52
7	3	72
$2\frac{1}{3}$	4	24
$9\frac{1}{3}$		96
2		52
$7\frac{1}{3}$		44
	6	

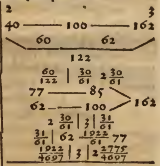
2	4	52
7	3	72
$9\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	96
$7\frac{1}{3}$	6	44

De regula Aurea. Caput XXX.

Hæc

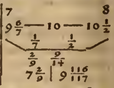
HÆc regula rerum, quæ in uſum ueniunt, maximā partem amplectitur, nam quæſtione ad poſitionem deducta, perfectaqꝫ operatione, proximam quærit æſtimationem, quæ ſic habetur. Primo uenare proximiores integros numeros, maiorem ac minorem, qui æquationi ſatisfaciunt, quos non difficile erit habere, horum minorem uocabimns primum inuentum, & maiorem ſecundum inuentum, & differentiam productorum, differentiam maiorem, differentiam uero producti primi & numeri æquationis, differentiam primam, differentiam autem producti ſecundi & numeri æquationis, ſecundam differentiā. Diuide igitur differentiam primam, per differentiam maiorem, quod exit, addatur primo inuento, & perficiemus æſtimationem imperfectam quam deducemus ad æquationem, ſcilicet per denominationes æquationis, ut in primo & ſecundo inuento, & quod producitur, ſubtrahe à producto ſecundo, deinde ſubtrahe æſtimationem imperfectam, ab inuento ſecundo, reſiduum duc in differentiam ſecundam habitam, & tale productum diuide per differentiam producti æſtimationis imperfectæ, & ſecundi producti, quod exit, detrahe ex inuento ſecundo, reſiduum eſt æſtimatio rei ualde proxima, cui per iteratas operationes ſemper propinquius licet accedere, idem fiet, ubi ęquatio ſit denominatiōis alicuius, ad numerum, ac denominationes, ut in exemplis patebit.

Sit igitur primo, q̄d'q̄dratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quòd ſi res eſt 2 q̄d'q̄dratum, & 3 cubi ſunt 40, & ſi res eſt 3, erit q̄d'q̄dratum & 3 cubi 162, igitur inuentum primum eſt 2, & productum primum 40, & inuentum ſecundum 3, & productum ſecundū 162, & 122, maior differentia, & 60 differentia prima, & 62 differentia ſecunda, & nota, quòd inuentum primum ſemper differt unitate ab inuento ſecundo, aliter non recte es operatus, his cognitis, diuide 60 per 122, exit $\frac{30}{61}$, quod adde ad 2, primum inuentum, fit imperfecta æſtimatio $2\frac{30}{61}$, hanc ducito ad q̄d'q̄dratum & tres cubos, fit 85 ferè, ſubtrahe igitur 85 productum æſtimationis imperfectæ, à 162, producto ſecundo, habebis 77, ſubtrahe etiam $2\frac{30}{61}$, ex 3 inuento ſecundo, relinquuntur $\frac{31}{61}$, duc in 62 differentiam ſecundam, fit $\frac{1922}{61}$, diuide per 77, exit $\frac{1922}{4697}$, detrahe ex 3 inuento ſecundo, erit æſtimatio ſatis

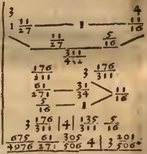


proxima q̃d'q̃drati p: 3 cubis æqualium 100, hæc, $2\frac{2775}{4697}$, & ſi uelles, poſſes alternatis operationibus quantumlibet propius accedere.

Quòd ſi quadratum & 20., æquentur 10 rebus, tunc ſi res eſſet 7, haberemus quadratum p: 20, æquale rebus $9\frac{6}{7}$, & ſi res eſſet 8, haberemus quadratum p: 20, æquale rebus $10\frac{1}{2}$, igitur ut prius, inuentum primum eſt 7, productum primum $9\frac{6}{7}$, inuentum ſecundum 8, productum ſecundum $10\frac{1}{2}$, differentia maior $\frac{9}{14}$, differentia prima $\frac{1}{7}$, differentia ſecunda $\frac{1}{2}$, diuidemus igitur differentiam primam, per maiorem differentiam, exibit $\frac{2}{9}$, & addemus hoc ad 7, inuentum primum, fiet æſtimatio imperfecta $7\frac{2}{9}$, cuius quadratum p: 20, eſt æquale 9 rebus & $\frac{116}{117}$, ideo quia hoc inſenſibiliter differt ferè, à 10, numero rerum, ideo non utimur alia operatione, ſed dicemus æſtimationem propinquam eſſe $7\frac{2}{9}$.



Sit etiam cubus æqualis 6 rebus p: 20, dicemus, ſi 3 eſſent res, 6 res & 20 æquarentur $1\frac{11}{27}$ cubi, & ſi res eſſent 4, eſſent 6 res & 20, æq̃les $\frac{11}{16}$ cubi, igitur inuentum primum eſt 3, & productum primum $1\frac{11}{27}$, inuentum ſecundum erit 4, productum ſecundum $\frac{11}{16}$, differentia prima $\frac{11}{27}$, differentia ſecunda $\frac{5}{16}$, differentia maior $\frac{311}{432}$, cum quã diuide differentiã minorẽ, exit $\frac{176}{311}$, quam adde ad 3, fiet æſtimatio imperfecta $3\frac{176}{311}$, ſequere æquationem, ſcilicet aſſumendo 6 res p: 20, & erunt $\frac{1245186154}{1303938029}$ ſui cubi, hoc autem eſt proximum ad $\frac{31}{34}$, ab hoc detrahemus productum ſecundum, & relinquẽtur $\frac{61}{271}$ & $\frac{5}{16}$, ſimiliter ſubtraho $3\frac{176}{311}$, æſtimationem imperfectã, à 4 inuento ſecundo, relinquitur $\frac{135}{311}$, hoc duco in $\frac{5}{16}$ differentiam ſecundã, ut etiam in primo exemplo, fit $\frac{675}{4976}$, diuide per differentiam producti ſecundi, & producti æſtimationis, & eſt $\frac{61}{271}$, exit $\frac{182925}{303536}$, detrahe à ſecundo inuento, ut prius, relinquitur rei æſtimatio $3\frac{120611}{303536}$, & hoc eſt proximum ad $3\frac{201}{506}$, & ideo ad $3\frac{2}{5}$, & 6 res p: 20, ſunt $40\frac{2}{5}$, & cubus $3\frac{2}{5}$, eſt $39\frac{38}{625}$, & ſi uelles proximius poſſes operari tertio, ſicut primo feciſti, & proculdubio peruenires ad inſenſibilem differentiam, & ratio hæc uniuerſalis eſt, nec indiget alia regula.



Et ſimiliter operaberis, ubi eſſent tres denominationes æquales

duabus

duabus alijs, aut tribus, ſed cum duplici ingreſſu, uel triplici, potes etiam deducere ad numeros omnia, ut in primo exemplo, & operationes in eo caſu ſunt longe faciliores, uelut ſi dicam q̄d'q̄dratum & 6 q̄drata & 200, æquantur 10 cubis & 12 rebus, erit primũ inuentum 9, & productũ m: 152, differentia quia 10 cubi & 12 res ſuperant q̄d'q̄dratũ 6 q̄d. & 200, & ſecundum inuentum erit 10, & productum ſecundum erit 680 p: quo q̄d'q̄dratum & 6 quadrata & 200, ſuperant 10 cubos & 12 res, & tunc differentia prima, æqualis eſt producto primo, & differentia ſecunda, producto ſecũdo, & maior differentia eſt aggregatum ex utroq;, & tunc ſufficiet pro prima operatione, diuidere ut prius, differentiam primã per differentiam maiorẽ, & quod exit, & eſt $\frac{19}{104}$, addemus primo inuento, & fiet æſtimatio imperfecta 9 $\frac{19}{304}$, deinde ſi uis proximius accedere, produces hanc æſtimationem ad ſuas denominationes utrinq;, & collige differentiam quæ uocetur A. quam multiplica per differentiam æſtimationis imperfectæ & ſecundi inuenti, & productum diuide denuo per maiorem differentiam, & quod exit, adde aut minue, ſecundum quod oportet, & habebis intentum, & hoc modo liceret etiam operari in ſecundo & tertio exemplo, ſed nos uoluimus declarare utrumq; modum, ad maiorem in occaſionibus facilitatem, idem dic de radicibus extrahendis.

9	10
152 m:	p: 680
$\frac{152}{832}$	832

De regula Magna. Caput XXXI.

HAec regula eſt pro magnis quæſtionibus ſoluendis, & ex ea inuentæ ſunt regulæ auri & argenti conſolandi, Acuit ingenium, & fit per demonſtrationes, exigitq; hominem expertum, doceturq; per quæſtiones, quoniam eſt multiformis, Et fundamentum regulæ eſt commutatio.

Qvæstio I.

Fac de 8 duas partes, ex quarum cubis inuicem ductis, fiat 16. Dices igitur, ex una in aliam fiet ℞ cubica 16, diuide 8 in duas partes, ex quarum ductu inuicem fiat ℞ cubica 16, & erunt 4 p: ℞ v: 16 m: ℞ cubica 16, & 4 m: ℞ v: 16 m: ℞ cubica 16.

Qvæstio II.

Fac de 8 tres partes proportionales, quarum quadratum primæ ſit æquale reliquis, igitur fient primæ duæ partes, quarum unius quadratum, ſit æquale alteri, deinde maiorem diuidemus in duas partes

exiſtentes in continua proportione cum minore, & erunt.

QVÆSTIO III.

Fac ex 8 tres partes proportionales, quarum quadratum maioris, ſit proportionale inter cubũ utriuſq; partis, dices igitur, cubus minoris eſt ℞ cubica cubi maioris, & hoc, quia proportio cubi maioris, ad ſuum quadratum, eſt ipſa maior, & hæc eadem eſt quadrati maioris, ad cubum minoris, igitur cubus minoris, eſt ℞ q̃drati maioris, & æqualis ipſi maiori, quare 8 conſtat ex minore & ſuo cubo, igitur 1 cub. p: 1 re, ęqualis eſt 8, & ęſtimatio rei eſt minor pars.

p^a	℞ $8\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
2^a	℞ v: ℞ $631\frac{1}{4}$ m: $10\frac{3}{8}$ p: $\frac{1}{4}$ m: ℞ $2\frac{1}{16}$
3^a	$8\frac{3}{4}$ m: ℞ $18\frac{9}{16}$ m: ℞ v: $631\frac{1}{4}$ m: $10\frac{3}{8}$

QVÆSTIO IIII.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd ſeptuplum maioris, ſit proportionale inter quadratum maioris, & cubum minoris, ſit A maior, & C quadratum eius, & B minor, & D cubus eius, ſit etiam E ſeptuplum A, cum igitur ex A in A fiat C, & ex A in 7 E, erit A ad 7, ut C ad E, quare ex 11^a 5^i, ut B ad D, igitur ex A in D, fit ſeptuplum E, at E eſt ſeptuplum A, igitur ex A in D, fit 49 A, igitur D eſt 49, quadratum 7, quare cubus B minoris eſt 49, & B eſt ℞ cubica 49, & A reſiduum.

	8	
A	7	B
C	E	D

QVÆSTIO V.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd ſeptuplum maioris, ſit proportionale, inter cubum maioris & quadratum minoris, ſit A maior, & C cubus A, & B minor, & D quadratum B, & E productum ex 7 in A, quia igitur ex A in quadratum A, fit C, & in 7, fit E, erit quadrati A ad 7, ut C ad E, quare ut E ad D, proportio autem quadrati A, ad quadratum B, componitur ex proportione quadrati A ad 7, & 7 ad quadratum B, quare ex proportione E ad D, & 7 ad quadratum B, ſed D eſt quadratum B, igitur proportio quadrati A ad quadratum B, componitur ex proportione ſeptupli A, & eſt E ad D, & 7 ad ipſum D. proportio igitur quadrati A ad D, componitur ex proportione E ad D, & 7 ad D, igitur ex regula ſex quantitatum, ſeu ex proportionũ compoſitione, ex 7 in E, fit quadratum A in D, ſed E eſt ſeptuplum A, igitur ex 49 in A, fit quadratum A in D, igitur ex A in D, ſeu in quadratum B, fit 49, quare ex capitulo cubi & numeri æqualium quadratis, B eſt ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & A $7\frac{1}{2}$ m: ℞ $7\frac{1}{4}$.

	8	
A	7	B
C	E	D

QVÆSTIO VI.

Fac ex 8 duas partes, quarũ productũ totius in minorẽ, ſit proportionale inter producta maioris in totum, & maioris in minorem, quia

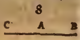
igitur minor ducitur in maiorem, & totum erit illorum productorũ proportio, ut totius ad maiorẽ, item quia totum ducitur in maiorẽ & minorẽ, erit productorum, ut maioris ad minorẽ, ſed producta ſunt proportionalia, igitur ex 11ª 5ⁱ elementorum, totius ad maiorem partem, ut maioris ad minorem, igitur 8 diuiſum erit ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema, quare partes ſunt manifeſtæ, ℞ 80 m: 4 & 12 m: 80.

Quæstio vii.

Fac de 8 duas partes, ita quod productum maioris in minorem, ſit proportionale inter quadratum minoris & decuplum eiuſdem minoris, dices igitur, quia minor eſt illa, quæ multiplicatur in ſe, in maiorem, & in 10, quod maior eſt proportionalis inter minorem & 10, igitur quadratum maioris, æquatur decuplo minoris, & res nota eſt, nã maior erit ℞ 105 m: 5, & minor 13 m: ℞ 105.

Quæstio viii.

Fac de 8 duas partes, quarum quadratum maioris ſit proportionale inter quadratum minoris, & productum ex toto in maiorem, pone maiorem A, & B minorem, quia igitur quod fit ex 8 in A, proportionale eſt inter 64 & quadratum A, ex demonſtratis in ſecundo ſuper Euclidem, erit 64 quarta quantitas proportionalis, cum illis tribus productis, quare 64 ad quadratum A, ut quadrati A ad quadratũ B duplicata, igitur 8 ad A, ut A ad B duplicata, ex 17ª 6ⁱ elementorum, nam utraq; eſt media proportionum ſuorum quadratorum, quare cubus A æqualis eſt producto ex 8 in quadratum B, hoc enim in ſeptimo libro demonſtratum eſt, quare ponemus A quadratum, erit cubus eius, cubus quadrati ℞ A, quæ ſit C, igitur quadratum B, eſt æquale $\frac{1}{8}$ quadrati cubi C, igitur B eſt, ℞ $\frac{1}{8}$ quadrati cubi C, quare cum ℞ cubi quadrati ſit cubus, erit B æqualis cubi C parti ℞ $\frac{1}{8}$, & cum A ſit quadratum C, erit 1 q̃dratum p: cub. ℞ $\frac{1}{8}$, æquale 8, & ideo multiplicando omnia per ℞ 8, erit cubus p: q̃d' ℞ 8, æqualis ℞ 512, ſolue igitur per capitulum 15ᵐ, ut in numeris rationalibus operando per regulas tertij libri.



Quæstio ix.

Fac ex 8 tres partes proportionales, quarum aggregatum primæ & ſecundæ, & aggregatum ſecundæ & tertię, & ipſum 8, ſint proportionalia, dico, inuenies primo proportionem illarum quantitatũ proportionalium, quarum aggregatum ſecundæ & tertiæ, eſt proportionale inter aggregatum primę & ſecundæ, & aggregatum omniũ, ſint igitur tales quantitates A B C, & quia proportio A B C, ad B C, eſt ut

B C, ad A B, ex ſuppoſito quæſtionis, & B C ad A B, ut C ad B, ex 12ª quinti elementorum, erit A B C, ad B C, ut B ad C ex 11ª eiuſdem, ſed ex proportione in B fit C, igitur ex proportione in B C, fit, A B C, ſit igitur, ut ex proportione in C fiat D, cum igitur ex proportione in B fiat C, & ex eadem in C fiat D, igitur ex proportione in B C fit C D, & ex eadem in B C fiebat etiam A B C, igitur A B C, æquatur C D, abiecto autem C relinquetur A B, æqualis D, eſt autem D quarta quantitas proportionalis, igitur oportebit inuenire quatuor quantitates, continue proportionales, quarum quarta ſit æqualis duabus primis, poſita igitur pª 1, 2ª 1 re, 3ª 1 quadratũ, 4ª 1 cub. erit cubus æqualis 1 rei p: 1, & nota eſt ex capitulo, quantitas rei, quæ eſt proportio, diuides igitur 8 in quatuor quantitates ſub ea proportione continuatas, ut in ſexto libro docetur, ſoluimus & aliter hanc quæſtionem in quarto libro.

A	B	C	D

QVÆSTIO X.

Fac ex 8 duas partes, quarum ſeptuplum maioris, proportionale ſit inter cubum minoris, & productum maioris in minorem. Sit A minor, eius cubus C B autem maior, & productum B in A ſit E, & ſeptuplum B ſit D, quia igitur ex B in A, fit E, & ex B in 7 fit D, erit A ad 7, ut E ad D, quare A ad 7, ut D ad C, igitur ex A in C, fit ſeptuplum D, ſed D eſt ſeptuplum B, igitur 49 B, æqualia ſunt quadrato quadrati A, igitur B eſt æquale $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati A, quia igitur A cum B eſt 8, & B eſt $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati A, igitur A cum $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati ſui, æquatur 8, quare res & $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati æquatur 8, igitur q̄d'q̄dratum p: 49 rebus, æquatur 392, & quamuis huius non ſit capitulum generale, pulchrum tamen fuerit hucuſq; perduxiſſe quæſtionem.

	8	
A	B	7
C	D	E

2 Deprehenditur & quandoq; impoſsibilitas eodem modo propoſitarum quæſtionum, ut facile eſt uidere.

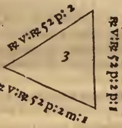
De regula æqualis poſitionis. Cap. XXXII.

1 HÆc regula, eſt utilior poſitione ſimplici, in omnibus quæſtionibus, ubi partes æqualiter multiplicantur, ſecus ubi inæqualiter, nam in his ſimplex facilior eſt, ut ſi dicam, diuide 8 in duas partes, quarum una ducta in quadratum alterius, uel in cubum, fiat 20, per ſimplicem poſitionem peruenies ad 8 quadrata m: 1 cubo, æqualia 20, uel ad 8 cub. m: 1 q̄d'q̄drato, æqualia 20 in ſecunda quæſtione, ſed ponendo 4 p: 1 poſitione, & 4 m: 1 poſitio-

poſitione, peruenies ad 16 poſ: p: 44, æquales 1 cubo p: 4 quadratis, & in ſecunda quæſtione, ad 128 poſitiones p: 236, ęqualia 1 q̄d'q̄dra to p: 8 cubis, manifeſtum eſt igitur, quàm hęc ſint prioribus difficilio res. In poſitione etiam ſimplici, inuenimus prima operatione, rei æſtimationem in æquali differentiam, quæ addita dimidio diuidendi, & detracta, oſtendit numeros quæſitos, qui uere ſunt æſtimatio rei, quanq́ poſuerimus rem eſſe differentiam, uoco autẽ poſitionem ſimplicem, cum dico, diuide 10 in duas partes, producentes 20, tunc ponimus partem unam rem, aliam 10 m: re, ſed ęqualem, cum pono partem unam 5 p: re, & aliam, 5 m: re, ideo cum ſimplex iam per ſe nota ſit, de æquali per quæſtiones & exempla dicendum erit, cum certe frequentiſsimus ſit eius uſus ac utiles.

Quæstio I.

Eſt trigonus, cuius laterum differentia primi ad ſecundum, eſt 1, & iterum ſecundi ad tertium, eſt etiam 1, & area eſt 3, pones ſecundum igitur poſitionem, & primum erit poſitio m: 1, & tertium poſitio p: 1, ſequere trigonorũ regulam, datam in libro ſequente, & fiet ℞ $\frac{3}{16}$ q̄d'q̄drati m: $\frac{3}{4}$ q̄drati uniuerſaliter ſumpta, æqualis 3, quare $\frac{3}{16}$ q̄d'q̄d'' æquabitur $\frac{3}{4}$ quadrati p: 9, ideoq́ 1 q̄d'q̄dratum, æquatur 4 quadratis p: 48, & res erit per capitulum deriuatiuorum, ℞ v: ℞ 52 p: 2, & hoc eſt latus ſecundum, adde igitur, & minue 1 habes reliqua latera, ut in figura uides.



Quæstio II.

Fac de 10 duas partes, quarum cubi cum quadratis iuncti, faciãt 400, pones primã partem 5 p: 1 poſitione, & ſecundam partẽ 5 m: 1 poſitione, ſequere problema, reducendo partes ad cubum, & ad quadratum, colliges tandem cadentibus uiciſsim partibus, 32 quadrata p: 300, æqualia 400, quare quadratum æquabitur 3 $\frac{1}{8}$, & res quæ eſt differentia, erit ℞ 3 $\frac{1}{8}$, igitur partes ſunt 5 p: ℞ 3 $\frac{1}{8}$ & 5 m: 3 $\frac{1}{8}$.

5 p: 1 poſ:	25 p: 1 q̄d. p: 10 rebus
	125 p: 15 q̄d. p: 75 rebus p: 1 cu.
5 m: 1 poſ:	25 p: 1 q̄d. m: 10 rebus
	125 p: 15 q̄d. m: 75 reb⁹ m: 1 cu.
	300 p: 32 q̄d. æqualia 400

QVÆSTIO III.

Fac ex 6 duas partes, quarum quadratorum aggregatum, ſit æquale differentiæ cuborum. Pones maiorem 3 p: 1 poſitione, & minorem 3 m: 1 poſitione, ſequere quæſtionem, habebis aggregatum quadratorum, 2 quadrata p: 18, & differentiam cuborum 2 cubos p: 54 poſitionibus, &

3 p: 1 poſ:	9 p: 1 q̄d. p: 6 rebus
3 m: 1 poſ:	9 p: 1 q̄d. m: 6 rebus
	18 p: 2 q̄d. aggregatum
3 p: 1 poſ:	27 p: 9 q̄d. p: 27 poſ: p: 1 cub.
3 m: 1 poſ:	27 p: 9 q̄d. m: 27 poſ: m: 1 cu.
	differentia 54 poſ: p: 2 cu.

hæc æquantur inuicem, igitur cubus & 27 poſitiones æquatur quadrato & 9, ſequere capitulum, fiet rei æſtimatio, id eſt differentiæ, ℞ v: cubica ℞ $702\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: ℞ v: cubica ℞ $702\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$ p: $\frac{1}{3}$, quare partes erunt, $3\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica ℞ $702\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: ℞ v: ℞ $702\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$, & minor, $2\frac{2}{3}$ p: ℞ v: cubica ℞ $702\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$ m: ℞ v: cubica ℞ $702\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$.

QVÆSTIO IIII.

Fac ex 8 duas partes, quarum productum maioris in minorem, proportionale ſit, inter nonuplum maioris, & ipſam minorem. Pone partem primam 4 p: 1 poſitione, & minorē 4 m: 1 poſitione, ſequere propoſitū, habebis productum maioris, in 9, eſſe 36 p: 9 poſitionibus, & maioris in minorem 16 m: 1 quadrato, & minorem 4 m: 1 poſitione, & hæc ſunt proportionalia, igitur ducto 36 p: 9 poſitionibus, in

9		4 m: 1 poſ:
4 p: 1 poſ:		
36 p: 9 poſ:	16 m: 1 q̄.	4 m: 1 poſ:
		256 p: 1 q̄d' q̄d m: 32 q̄d
		144 m: 9 q̄d.
112 p: 1 q̄d' q̄d. æq̄l. 23 q̄d.		

4 m: 1 poſitione, fit quadratū 16 m: 1 quadrato, ducito igitur inuicē 36 p: 9 poſitionibus, & 4 m: 1 poſitione, & cadent poſitiones propter mutuam proportionem, quare producetur, 144 m: 9 quadratis, & hoc eſt æquale quadrato 16 m: 1 quadrato, quod eſt, 256 p: 1 q̄d' q̄drato m: 32 quadratis, quare reddendo m: parti aduerſæ, 112 p: 1 q̄d' q̄drato, æquabuntur 23 quadratis, habebis æſtimationem rei, ℞ v: $11\frac{1}{2}$ m: ℞ $20\frac{1}{4}$, id eſt ℞ 7, quam adde & minue à 4, erunt partes quæſitæ, 4 p: ℞ 7, & 4 m: ℞ 7, & quamuis potuiſſes ſoluere per ſimplicem, ueniens ad capitulum cubi & rerum, æqualium quadratis & numero, fuiſſet tamen negocium inexplicabilius, ſine ulla comparatione, nam pluſq̄ decem alijs indiges operationibus, anteq̄ peruenias ad ueram æſtimationem, quæ ſemper eſt in natura Binomij, uel reciſi ueri, non improprij.

Qvæstio v.

Diuide 10 in duas partes, quarum quadrato primæ detracto ex 100, & quadrato ſecundæ detracto ex 97, reſiduorum ℞ iunctæ, conſtituant 17. Si libet ad uitandū laborem, primo uidebis uia tentatiua, an caſus poſsibilis ſit, hoc igitur cognito, pone primum partem 5 p: 1 poſitione, & reliquam 5 m: 1 poſitione, duc partes in ſe, & quadratū maius detrahe ex 100, & minus ex 97, habebis reſidua, ut in figura, quorum ℞ iunctæ, debent æquari 17, igitur 17 m: una illarum radicum æquatur reliquæ, quare ducemus in ſe, 17 m: ℞ v: 75 m: 1 quadrato m: 10 poſitionibus, & habebimus 364 m: 1 quadrato m: 10 poſitionibus m: ℞ v: 86700 m: 1156 q̄dratis m: 11560 rebus, æq̄lia quadrato alterius radicis, ſcilicet 72 m: 1 quadrato p: 10 rebus, abijce ſimilia ex utraq; parte, & radicē uniuerſalē ſolam ex aduerſo omniū colloca, ut in quarto libro docuimus, ac in quinto habebis 292 m: 20 reb⁹, æqualia ℞ v: 86700 m: 1156 q̄dratis m: 11560 rebus, quare ducendo denuo partes in ſe, habebis 86700 m: 1156 q̄dratis m: 11560 poſitionib⁹, æq̄lia 85264 p: 400 q̄dratis m: 11680 rebus, duc ad æquationem reducendo ad 1 q̄dratū habebis rei æſtimationē eſſe ℞ $\frac{139876}{151321}$ p: $\frac{15}{389}$, ſed ℞ $\frac{139876}{151321}$, eſt $\frac{374}{389}$, igitur additis $\frac{15}{389}$ fient $\frac{389}{389}$, igitur res eſt 1, & partes 4 & 6.

5 p: 1 poſ.	5 m: 1 poſ.
25 p: 1 q̄d. p: 10 poſ.	100
25 p: 1 q̄d. m: 10 poſ.	97

75 m: 1 q̄d. m: 10 poſ. reſid.
72 m: 1 q̄d. p: 10 poſ. reſid.

17 m: ℞ v: 75 m: 1 q̄d. m: 10 poſ.
℞ v: 72 m: 1 q̄d. p: 10 poſ.

364 m: 1 q̄d. m: 10 poſ. m: ℞ v: 86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 poſ. 72 m: 1 q̄d. p: 10 poſ.

292 m: 20 rebus
℞ v: 86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 poſ.

86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 poſ.
85264 p: 400 q̄d. m: 11680 poſ.

1436 p: 120 poſ. æq̄l. 1556 q̄d.
1556

quad. æq̄l. $\frac{30}{389}$ poſ. p: $\frac{359}{389}$

Qvæstio vi.

Eſt etiam, ubi poſitio æqualis, non ſoluit omnino quæſtionem, & ſimplex ſoluit. Exemplum, fac de 8 duas partes, quarum quadratum maioris, ſit proportionale inter productum maioris in minorem, & decuplum totius, ut pote 60, poſita itaq; maiore 1 poſitione, habebis 60 & 1 quadratum & 8 poſitiones m: 1 quadrato proportionalia, quare ducta media in ſe

60 | 1 q̄d. | 8 poſ. m: 1 q̄d.
1 q̄d q̄. æq̄. 480 poſ. m: 60 quad.

P ipſam

ipſam, habebimus 1 q̄d'q̄dratum, ęquale 480 poſitionibus m: 60 qua dratis, deprime, & fiet cubus & 60 res, æqualia 480, & ideo res nota eſt, per poſitionem autem ęqualem, peruenies ad capitulum conſtans ex quinq; denominationibus, poſſet autem ſolui, & per regulam magnam, ſed hoc ad rem nihil pertinet.

De regula inæqualiter ponendi, ſeu proportionis. Caput XXXIII.

HÆc regula nos docet, ut poſitis numeris inæqualibus, poſitiones pariter æquales annectamus, ſic ut in multiplicatione, uiciſsim ſimiles excidãt partes. Docebo autem hoc per exempla, quamuis quæſtiones quæ per hãc ſoluuntur, etiam per regulam retro agendi poſitionem, de qua in capitulo quinto dictum eſt, diſſolui poſsint.

QVÆSTIO I.

Exemplum. Sunt duo numeri, quorum differentia eſt 4, & quadratum minoris cum quadrato dimidij maioris, & ℞ aggregati ipſorum quadratorum, conſtituit 110, poſſes hanc retro agendo dicere, igitur 110 componitur ex aggregato quadratorum, & ℞ aggregati, igitur poſito aggregato quadrato, erit 110 æquale quadrato & uni rei, quare res eſt 10, aggregatum 100, ideo facies ex 100 duas partes, quarũ duplum ℞ unius, excedat aliam ℞ in 4, & ſolutio clara eſt, uerum hoc modo nos ſic ponemus, ſit primus numerus minor 2 poſitiones, quia pars eſt $\frac{1}{2}$, erit maior 2 poſitiones p: 4, inde accipe partem ſecundi, quę eſt in ſe ducenda, & eſt $\frac{1}{2}$, erit igitur pars multiplicanda 1 poſitio p: 2, & primus numerus ut dictũ eſt, 2 poſitiones, hoc habito, poſitum eſt, nõ permutata quæſtionis natura, partes numeri ita aptare cum rebus, ut in quadratis res ex toto excidant, ſic igitur facies, conſidera ſecundum numerum in ſe ducendum, qualis pars ſit primi, ut in exemplo, 1 poſitio p: 2, quæ pars eſt 2 poſitionum, inuenies quod eſt $\frac{1}{2}$ p: 2, duc igitur denominatorem & numeratorẽ fracti in ſe, & producta iunge, & habebis 5, pro diuiſore, deinde duc numeratorem in ſe, & productũ in numerum differentiæ, qui eſt 4, fit etiam 4, pro diuidendo, diuide igitur

2 poſ. | 2 poſ. p: 4
2 poſ. | 1 poſ. p: 2

$\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{1}$ — $\frac{1}{4}$) 4 — $\frac{5}{1}$ — $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{2}$ ✕ $\frac{4}{5}$ | $\frac{8}{5}$

2 poſ. m: $\frac{4}{5}$
1 poſ. p: $\frac{8}{5}$

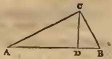
4 q̄d. p: $\frac{16}{25}$ m: $\frac{16}{5}$ poſ.
1 q̄d. p: 2 $\frac{14}{25}$ p: $\frac{16}{5}$ poſ.

5 q̄d. p: 3 $\frac{1}{5}$

tur 4 per 5, exit $\frac{4}{5}$, hoc auferes ex 2 poſitionibus, ſcilicet maiore parte, habebis 2 poſ. m: $\frac{4}{5}$, deinde diuide $\frac{4}{5}$ per $\frac{1}{2}$ partem, exit $\frac{8}{5}$, hoc addes ad 1 poſitionem, habebis 1 poſ. p: $\frac{8}{5}$, ecce uides, quoniam habes 2 poſitiones m: $\frac{4}{5}$, & 1 poſitionẽ p: $\frac{8}{5}$, & proportio $\frac{8}{5}$ ad $\frac{4}{5}$, eſt ut 2 poſitiones ad 1 poſitionem, & ſi ſumpſeris duplum maioris, ſcilicet 2 poſ. p: 3 $\frac{1}{5}$, ſuperabit minorem ſcilicet 2 poſ. m: $\frac{4}{5}$, in 4, ad unguem, hoc peracto, ex regula uniuerſali, duc partes in ſe, habebis 4 quadrata p: $\frac{16}{25}$ m: $\frac{16}{5}$ poſitionibus, & 1 q̄dratum p: 2 $\frac{14}{25}$ p: $\frac{16}{5}$ poſitionibus, iunge, habebis 5 q̄drata p: 3 $\frac{1}{5}$, hæc cum radice æquantur 110, igitur ℞ æquatur 110 m: hoc aggregato, igitur 106 $\frac{4}{5}$ m: 5 quadratis, æquatur ℞ v: 5 quadratis p: 3 $\frac{1}{5}$, duc partes in ſe, habebis 5 quadrata p: 3 $\frac{1}{5}$, æqualia 11406 $\frac{6}{25}$ p: 25 q̄d'q̄dratis m: 1068 q̄dratis, redde reddenda m: alteri parti, & diuide per numerum q̄d'q̄dratorum, qui eſt 25, habebis 1 q̄d'q̄dratum p: 456 $\frac{76}{625}$, æqualia 42 $\frac{23}{25}$ q̄dratis, ideo res ualet ℞ v: 21 $\frac{23}{50}$ m: ℞ 4 $\frac{1025}{2500}$, ſed ℞ 4 $\frac{1025}{2500}$ eſt 2 $\frac{1}{10}$, igitur res eſt ℞ 19 $\frac{36}{100}$, ſed hæc eſt 4 $\frac{2}{5}$, igitur res fuit 4 $\frac{2}{5}$, ſed prima pars ſeu maior, fuit 2 poſitiones m: $\frac{4}{5}$, igitur ipſa fuit 8, & minor fuit 1 poſitio p: $\frac{8}{5}$, igitur fuit 6, & eius duplum fuit 12, qui excedit 8 in 4, & hoc eſt quod uoluimus.

Qvæstio II.

Eſt trigonus A B C, cuius baſis A B, eſt 8 p: catheto C D, & A D tripla eſt D B, & quadratum B C cum latere C B, eſt 182, poſita igitur C D re, & A B, re & 8, ſeu C D 4 rebus, & A B 4 rebus p: 8, erit B D res p: 2, & proportio $\frac{1}{4}$, ideo ut prius, duc 4 in ſe, fit 16, duc 1 in ſe, fit 1, iunge, fit 17, diuiſor, inde duc 1 numeratorẽ $\frac{1}{4}$ in ſe, fit 1, duc in 8 differentiam, fit 8, diuide per 17, exit $\frac{8}{17}$, pars minuẽda ex 4 rebus, inde diuide $\frac{8}{17}$ per proportionem quæ eſt $\frac{1}{4}$, exit $\frac{32}{17}$, pars addenda uni rei, erit igitur B D 1 poſitio p: $\frac{32}{17}$, & C D, 4 poſitiones m: $\frac{8}{17}$, duc partes in ſe, habebis quadrata C D & B D pariter accepta, & ex conſequenti, quadratum B C, eſſe 17 q̄drata p: 3 $\frac{221}{289}$, ſequere ut in præcedente, addendo ei latus B C, eritq́ ℞ v: 17 quadratorum p: 3 $\frac{221}{289}$ p: 17 q̄dratis p: 3 $\frac{221}{289}$ æqualis 182, quare 178 $\frac{68}{289}$ m: 17 q̄dratis æquatur ℞ v: 17 q̄dratorum p: 3 $\frac{221}{289}$, ſequere igitur operationem, ut prius, habebis rei æſtimationem eſſe 3 $\frac{2}{17}$, cum igitur B D ſit 1 poſitio p: $\frac{32}{17}$, erit B D 5 &



4 poſ. 1 poſ. p: 2

$\frac{1}{4}$ — 1 / 16) 17

$\frac{1}{4}$ — 1 — 8 — $\frac{8}{17}$

$\frac{8}{17}$ ✕ $\frac{1}{4}$ $\frac{32}{17}$

4 poſ. m: $\frac{8}{17}$ | 1 poſ. p: $\frac{32}{17}$

16 q̄d. p: $\frac{64}{289}$ m: $\frac{64}{17}$ poſ.

1 q̄d. p: $\frac{1024}{289}$ p: $\frac{64}{17}$ poſ.

17 q̄d. p: 3 $\frac{221}{289}$

A B 20, quadrupla B D, quare C D, quæ eſt 8 m: quàm A B, erit 12.

QVÆSTIO III.

Et ſimiliter, ſi diceret, ſunt duo numeri, quorum differentia eſt 12, & quadratum minoris cum quadrato $\frac{3}{10}$ maioris, & quadrato aggregati, æquatur 1000, tunc ut prius operaberis, ducendo numeratorem ac denominatorem in ſe, & iungendo, fit diuiſor 109, deinde duco 3 numeratorem in ſe, & productum in 12, fit 108, diuido per 109, habeo partem minuendam ex 10 poſitionibus, deinde diuido $\frac{108}{109}$, per $\frac{3}{10}$, exit $\frac{360}{109}$, pars addenda 3 poſitionibus, ſi igitur 3 poſitiones p: $\frac{360}{109}$, ducantur in $\frac{10}{3}$, numerus qui producetur, erit 12 p: quàm 10 res m: $\frac{108}{109}$, & talis eſt proportio $\frac{360}{109}$ ad $\frac{108}{109}$, qualis 10 ad 3, & ideo, quia regula hæc habent infinitos modos, uelut ſi dicamus, $\frac{1}{2}$ primi & $\frac{1}{3}$ ſecundi numeri, differentium per 12, in ſe ducti addita radice, faciunt 100, tunc quæres eodem modo ſuam regulã, per regulam de modo, quia hæc regula eſt ramus illius, quærendo numeros differentes primo in 12, quorum $\frac{1}{2}$ unius ita diuidatur, in $\frac{1}{2}$ rem & numerum, & reliquus in $\frac{1}{3}$ rei & numerum, ita ut producta rerum ſint æqualia. Ponendo unum numerum p: alium m: & inuenitur per capitulum 9^{m}, cum quantitate ſurda, ut in talibus, ponam regulam exemplo adiunctam, dico quòd ſi quis dicat.

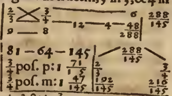
10 poſ. — 3 poſ.
$\frac{3}{10}$ — $\frac{9}{100}$) 109
$\frac{3}{10}$ — 9 — 12 — $\frac{108}{109}$
$\frac{108}{109}$ X $\frac{13}{10}$ $\frac{360}{109}$
3 poſ. p: $\frac{360}{109}$
10 poſ. m: $\frac{108}{109}$

QVÆSTIO IIII.

Inuenias duos numeros, quorum differentia ſit 14, & $\frac{1}{3}$ unius in ſe ductum, cum $\frac{1}{4}$ alterius in ſe ducto, & cum ℞ aggregati talium productorum, fiat 110, dico primo, duc denominatores in numeratores uiciſsim, uidelicet 4 in 1, & 3 in 1, & productorũ quæ ſunt etiam 4, & 3, iunge quadrata, habebis 25 pro diuiſore, deinde duc denominatores inuicem, 3 in 4, fit 12, & quod fit in differentiam quæ fuit 14, fit 168, hoc ducito in productum numeratorũ, quod fuit 1, fit etiã 168, ꝑ diuidendo, diuide igitur 168, per 25, exit $\frac{168}{25}$, hoc multiplica in ipſas partes, uidelicet $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, habebis 2 $\frac{6}{25}$, addendum, & 1 $\frac{17}{25}$ minuendum, quia ſemper ut dictũ eſt, minor pars numeri, minuitur à maiore, & maior additur

$\frac{1}{3}$ X $\frac{1}{4}$ — 1
3 — 4 — 12 — 14 — $\frac{168}{168}$
9 — 16 — 25
2 $\frac{6}{25}$ — $\frac{1}{3}$ > $\frac{168}{25}$
1 $\frac{17}{25}$ — $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$ poſ. m: 1 $\frac{17}{25}$
$\frac{1}{4}$ poſ. p: 2 $\frac{6}{25}$
$\frac{1}{9}$ q̄d. p: 2 $\frac{504}{625}$ m: 1 $\frac{3}{25}$ poſ.
$\frac{1}{16}$ q̄d. p: 5 $\frac{11}{625}$ p: 1 $\frac{3}{25}$ poſ.
$\frac{25}{144}$ q̄d. p: 7 $\frac{103}{125}$

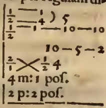
ditur minori, duc igitur $\frac{1}{3}$ poſitionis m: 1 $\frac{17}{25}$ in ſe, & ſimiliter $\frac{1}{4}$ poſitionis p: 2 $\frac{6}{25}$ in ſe, & collige ꝓducta, habebis $\frac{25}{144}$ q̄drati p: 7 $\frac{103}{125}$, abſq; rebus, quare ſequeris operationem, ut in prioribus. Aliud exemplũ, in regula parũ difficili, inuenias duos numeros differentes in 4, quorum $\frac{3}{4}$ minoris in ſe ducta, & $\frac{2}{3}$ maioris in ſe ducta, & aggregato productorũ addita radice, fiat 110, duces igitur in crucem, 3 in 3, & 4 in 2, & fient 9 & 8, quorum quadrata iuncta ſunt 145, pro diuiſore, ſimiliter duces 3 in 4, denominatores, fit 12, duc in 4, differentiã numerorum, fit 48, duc in 6, productum numeratorum, fit 288, pro diuidendo,



inde diuiſo 288 per 145, exit $\frac{288}{145}$, duc in $\frac{2}{3}$ & in $\frac{3}{4}$, partes acceptas ſeorſum, habebis $\frac{192}{145}$ & $\frac{216}{145}$, partes addendas ac minuendas ut prius.

Quæstio v.

Et ſimiliter dicemus de aggregato, ueluti ſi dicat, fac ex 10 duas partes, quarum una in ſe ducta, & alterius dimidio in ſe ducto, & accepta radice aggregati, totum ſit 30, dico operaberis per regulam dictam, in quæſtione prima ſcilicet, quia eſt de integris ex una parte, inuenies igitͤ numeros 4 & 2, & à maiore minues 1 poſitionẽ, & minori addes 2 poſitiones, & ideo in hoc differt à regulis numerorum differentiũ, cætera paria ſunt, & ideo ſequendo operationẽ, habebis rei æſtimationẽ, ℞ v: 2 $\frac{1}{10}$ m: ℞ $\frac{121}{100}$, quod eſt dicere 1, ideo numeri ſunt 6 & 4.



De regula medij. Caput XXXIIII.

HÆc ſic uocata à me eſt, quia medium inquiritur, ſcilicet 1
proportio, & quia ad unitatis confuſionem uitandam, ponimus partem unam, dimidium unitatis, & eſt eius uſus ſolum ad quærendum quantitates, quæ æqualiter multiplicantur, & proportionem ſeruant, cum autem eam non ſeruauerint, uſus regulæ non eſt utilis, uerum in duabus quantitatibus ſolum explicatur, de pluribus autem in capitulo 39° dicemus. Patet aũt, quod ſi quis dicat, inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta ſint 10, & cubi iuncti ſint 30, quod regula hæc non ſeruiet, quia proportio 30 ad 10, quæ eſt tripla, non ſeruatur inter cubos & quadratos,

uariata quantitate, at regulam ipſam oſtendere quemadmodum & alias per exempla utile fuerit.

QVAESTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum differentia ducta in quadratorum differentiam faciat 10, & aggregatum illorum in quadratorum aggregatum, faciat 20. Pones igitur ut dictum eſt unum illorum, poſitionem, alium $\frac{1}{2}$ deinde inuenies differentiam, & aggregatum, & quadrata partiũ, & differentiã quadratorum, & aggregatum, ut in margine, inde duc ito differentiam partium in differentiam quadratorum, & habebis $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo m: $\frac{1}{2}$ quadrato m: $\frac{1}{4}$ poſitionis, & hoc debet eſſe dimidium producti aggregatorum numerorum ſcilicet ac quadratorum, quia 10 eſt dimidium 20, igitur erit dimidium $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ poſitionis, quare $\frac{1}{4}$ p: 2 cubis m: 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ poſitione, ęquatur $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ poſitionis, igitur reddendo partes m: ad p: erit ut $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo, æquetur 1 $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{3}{4}$ poſitionis, quare diuiſis partibus, ad faciliorem operationem, quæ ſemper poterunt diuidi, habebimus 1 $\frac{1}{2}$ poſitionis, æqualem 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ poſitione p: $\frac{1}{4}$, diuiſor, namq; cõponitur ex partibus ab initio ſumptis, ſcilicet 1 poſitione & $\frac{1}{2}$, quare 1 quadratum p: $\frac{1}{4}$, æquabitur 2 poſitionibus, & res erit 1 p: ℞ $\frac{3}{4}$, ſunt igitur quantitates in proportione 1 p: ℞ $\frac{3}{4}$, & $\frac{1}{2}$, quare in proportione 2 p: ℞ 3, & 1. Iterum igitur quæramus duas quantitates in hac proportione, quarum aggregatum in aggregatum quadratorum ductum, faciat 20, nam tales neceſſario habebunt etiam reliquam conditionem, ponemus igitur unam illarum rem, aliam res 2 p: ℞ 3, & quæremus ſua quadrata, quæ iungemus, & erunt q̃drata 8 p: ℞

Numeri	1 poſ.	$\frac{1}{2}$
Differentia numerorum	1 poſ. m:	$\frac{1}{2}$
Aggrega. numerorum	1 poſ. p:	$\frac{1}{2}$
Quadrata	1 q̃d.	$\frac{1}{4}$
Differentia q̃dratorum	1 q̃d. m:	$\frac{1}{4}$
Aggregatum q̃drat.	1 q̃d. p:	$\frac{1}{4}$

ꝓductũ differen.ᵃ $\frac{1}{8}$ p: 1 cu. m: $\frac{1}{2}$ q̃d. m: $\frac{1}{4}$ poſ.
productum q̃drat $\frac{1}{8}$ p: 1 cub. p: $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ poſ.

$\frac{1}{4}$ p: 2 cub. m: 1 q̃d. m: $\frac{1}{2}$ poſ.
$\frac{1}{8}$ p: 1 cub. p: $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ poſ.

$\frac{1}{8}$ p: 1 cub. æquatur 1 $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{3}{4}$ poſ.

1 poſ. p: $\frac{1}{2}$	1 poſ. p: $\frac{1}{2}$
1 q̃d. m: $\frac{1}{2}$ poſ. p: $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ poſ.

Numeri	res 1	res 2 p: ℞ 3
Quadrata	q̃d. 1	q̃d. 7 p: ℞ 48
Aggreg. numero.		res 3 p: ℞ 3
Aggreg. q̃d.		q̃d. 8 p: ℞ 48
Productum		cubi 36 p: ℞ 1200

p: ℞ 48,& ducemus in aggregatum numerorum,ſcilicet res 3 p: ℞ 3, & fiunt cubi 36 p: ℞ 1200,diuidemus igitur 20 per ℞ 1200 p: 36, & exibit 7 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 52 $\frac{1}{12}$,cuius ℞ cubica erit numerus minor quæſitus, maior autem habebitur,ducto minore in 2 p: ℞ 3,quare numeri quæſiti erunt,

Primus ℞ v: cubica 7 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 52 $\frac{1}{12}$

Secundus ℞ v: cubica 195 m: ℞ 35437 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 33075 m: ℞ 35490

Quæstio II.

Inuenias duos numeros,quorũ differentia ducta in differentiam cuborum,producat 10,& aggregatum in aggregatum cuborum conſtituat 30, hac in quæſtione, procedes ut in præcedenti,uerum pones partes 1 poſitionem & 1, ad facilitatem maiorem,& ſequeris ut in præcedenti,donec ueneris ad 1 q̄d'q̄dratum p: 1,æquale 2 cubis p: 2 poſitionibus, igitur habeo quinq; quantitates cõtinue proportionales, quarum aggregatum primæ & quintæ,eſt duplum aggregato ſecundæ & quartæ, igitur per capitulum quinq; quantitatũ continue proportionalium,

Numeri	1 poſ.	1
Differentia numer^x	1 poſ. m:	1
Aggregatũ numero.	1 poſ. p:	1
Cubi	1 cub.	1
Differentia cuborum	1 cub. m:	1
Aggregatum cuborũ	1 cub. p:	1

Produc. aggregatorum

1 q̄d'q̄d. p: 1 cub. p: 1 poſ. p: 1

Productum differentiarum

1 q̄d'q̄d. m: 1 cub. m: 1 poſ. p: 1

3 q̄d'q̄d. m: 3 cub. m: 3 poſ. p: 3

1 q̄d'q̄d. p: 1 cub. p: 1 poſ. p: 1

2 q̄d'q̄d. p: 2	4 cub. p: 4 poſ.
1 q̄d'q̄d. p: 1	2 cub. p: 2 poſ.

quæro proportionem,aſſumendo puta 2 & 4, quorum 4 eſt duplus alteri,& faciendo de 4 primam & quintam, & de 2 ſecundam & quartam,igitur talis proportio erit ut $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: 2 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$,ad unitatem,pones igitur denuo res ſub his numeris,uidelicet 1 rem,& res $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: 2 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$,inde ducito ad cubum partes per regulas tertij libri,quod non difficile fiet, inde duces res ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: 2 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$,differentiam ſcilicet numerorum,in differentiam cuborum,quę habetur detracto 1 cubo,ex cubo dicti iam compoſiti ex quatuor nominibus, & productũ æquabitur 10,diuides 10 per tale productum & eius quod exit ℞'℞, erit æſtimatio primæ quantitatis,qua ducta in $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: 2 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$,conſurget ſecunda quantitas,ſeu ſecundus numerus.

Quæstio III.

Inuenias duos numeros quorum relati primi iuncti faciant 20,&

aggre-

aggregatum cuborum in aggregatum quadratorum ductum , faciat 25,pones ut in præcedente,partes, 1 poſitionem & 1 , & relati primi earum,ſunt 1 p^{m} R^{m} & 1 , & productum aggregati quadratorum in aggregatum cuborum eſt, 1 p^{m} R^{m} p: 1 cubo p: 1 quadrato p: 1 , & hoc ſe habet ad 1 p^{m} R^{m} p: 1 .ut 25 ad 20,& ut 5 ad 4,igitur per regulam quantitatum proportionaliũ , ducto 1 p^{o} R^{o} p: 1 cubo p: 1 q̄drato p: 1 ,per 4 , faciemus quantum ducto 1 p^{o} R^{o} p: 1 , per 5,igitur 4 p^{i} R^{i} p:4 cubis,p:4 q̄dratis p:4,æquantur 5 p^{is} R^{is} p:5, q̄re tandem habebimus 1 p^{m} R^{m} p: 1 ,facta detractione, æquale 4 cubis p:4 quadratis,diuide partes per poſitionem p: 1 q̄d'q̄drato m: 1 cubo p: 1 quadrato m: 1 poſitione p: 1 ,æqualia 4 quadratis,igitur 1 q̄d'q̄dratum p: 1 ,æquatur 1 cubo p: 3 q̄dratis p: 1 poſitione,ſunt igitur quinq; quantitates continue proportionales,quarum aggregatum primæ & quintæ,eſt gratia exempli 10,& aggregatum ſecundæ & quartæ cum triplo tertiæ etiam 10,igitur nota erit proportio , per capitulũ 5 quantitatum continue proportionaliũ,& erit $\frac{R\,3\frac{6}{7}\ m{:}\ 1\ p{:}\ R\ V{:}\ R\ 1\frac{5}{7}\ m{:}\ \frac{6}{7}}{2\ m{:}\ R\ 1\frac{5}{7}}$,& hæc eſt proportio illarum quantitatum , in ſecunda igitur poſitione,pones 1 rem,& res in numero ſupradicto ſeu proportione, uel reductam proportionem,ut in præcedente quæſtione , facta diuiſione per numeratorem,ad relatum ducito,per ſuam regulam, cui adde 1 , relatum primum de 1 ,& cũ aggregato diuide 20,& R relata prima, prouentus eſt numerus minor,inde multiplica ipſum in proportionem,& proueniet maior,& perficere talem operationem eſt res quaſi ſupra humanum laborem,& niſi eſſent regulæ tertij libri,uix omnino poſsibile foret.

1 poſ.	1
1 p^{m} R^{m}	1
1 cub.p:	1
1 q̄d. p:	1

1 p^{m} R^{m} p: 1 cu: p: 1 q̄d.p: 1

5 R^{i} p^{i} p: 5

4 R^{i} p^{i} p:4 cub.p:4 q̄d.p: 4

1 R^{m} p^{m} p: 1

æquatur 4 cub. p: 4 q̄d.

1 poſ. p: 1

1 q̄d'q̄d.m: 1 cub.p: 1 q̄d.m: 1 poſ. p: 1 4.q̄d.

1 q̄d'q̄d.p: 1 | 1 cu.p: 3 q̄d.p: 1 poſ.

De regula aggregati. Caput XXXV.

REGVLA I.

Sicut ex præcedente,& regula iterata,proportio ipſa quæ-
1 ritur,ſic per hanc habemus aggregatum, Eſt autem utilis ualde,ubi inter partes nulla ſupponitur proportio. Nam medi-

medium ad quærendum plures numeros ſimul, eſt uel proportio, uel aggregatum, aut differentia, cum igitur ex præcedente & regula iterata proportio habeatur, cum hac autem & aggregatũ & differentia, ſatis cõſtat, quanto hæc illas antecedat interuallo. Vocauimus & hãc regulam dupli, quòd duas contineat partes, ſeu duos numeros quæſitos, ratio uero eius, ut reliquarum, per exempla patet.

Quæstio I.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta ſint 20, & productum unius in alterum, cum ipſis numeris, ſit 10, dico (quamuis ex ſexto libro ſolui poſsit) ſic per regulam faciemus. Pone aggregatũ 1 poſitionem, ſeu rem, & quia ex uno in alterum fit 10, minus aggregato, igitur ex uno in alterũ fiet 10 m:re, fac igitur ex poſitiõe duas partes, producentes 10 m:1 poſitione, & erunt ex regula capituli de operationibus in ſexto libro poſita, partes, $\frac{1}{2}$ poſitionis p:℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati p:1 poſitione m:10, & $\frac{1}{2}$ poſitionis m:℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati p:1 poſitione m:10, horum itaq; quadrata iuncta debent eſſe 20, & quia una pars eſt Binomium altera reciſum reſpectu $\frac{1}{2}$ poſitiõis, ſufficiet ducere partes in ſe, non unam in aliam, ut in libris 3° 4° & 5° docuimus, ideo ducta $\frac{1}{2}$ poſitio in ſe, fit $\frac{1}{4}$ quadrati, & ducta ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃drati p:1 poſitione m:10, in ſe fit $\frac{1}{4}$ quadrati p:1 poſitione m:10, & tantundem ex alia parte, ut in figura, quare quadrata Binomij & reciſi iuncta, ſunt 1 quadratum p:2 poſitionibus m:20, & hoc æquatur 20, ut dictum eſt, igitur 1 q̃d. p:2 poſitionibus æquatur 40, & rei æſtimatio erit ℞ 41 m:1, fac ex ℞ 41 m:1 duas partes, quarum q̃drata iuncta ſint 20, & erũt per nouam poſitionem, uel per regulas capituli de operationibus in ſexto libro partes quas à latere uides.

$\frac{1}{2}$ poſ. p:℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p:1 poſ. m:10
$\frac{1}{2}$ poſ. p:℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p:1 poſ. m:10
$\frac{1}{4}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ q̃d. p:1 poſ. m:10
$\frac{1}{2}$ poſ. m:℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p:1 poſ. m:10
$\frac{1}{2}$ poſ. m:℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p:1 poſ. m:10
$\frac{1}{4}$ q̃d: p: $\frac{1}{4}$ q̃d. p:1 poſ. m:10
1 q̃d. p:2 poſ. m:20

p^a ℞ 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ p:℞ v: 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
2^a ℞ 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ m:℞ v: 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$

Quæstio II.

Inuenias duos numeros, qui iuncti faciant tantum, quantum inuicem ducti, & eorum quadrata iuncta ſint 20, ſi igitur aggregatum eſt 1 poſitio, productum etiam unius in alterum eſt 1 poſitio, fac ex 1 poſitione duas partes, producentes 1 poſitionem, per regulas capituli de operationibus in ſexto libro poſitas, ſeu per quintam ſecundi elementorum, & erunt partes quas à latere poſui, harum igitur quadrata iun-

ta iuncta ſunt 20, quare cùm habeāt ut in præcedenti rationem Binomīj & receſi, ſufficiet ducere partes unius eorum in ſe, & duplicare. igitur habebimus pro aggregato quadratorū 1 quadratum m: 2 poſitionibus, æqualia 20, quare res erit ℞ 21 p: 1, ideo faciemus ex ipſa partes, ut propoſitum eſt, & erunt ut uides.

| $\frac{1}{4}$ poſ. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. m: 1 poſ.
| $\frac{1}{2}$ poſ. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. m: 1 poſ.
| $\frac{1}{2}$ q̄d. p: $\frac{1}{2}$ q̄d. m: 2 poſ.

| ℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: 4 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5 $\frac{1}{4}$
| ℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: 4 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5 $\frac{1}{4}$

QVÆSTIO III.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producatur aggregatum, & quadrata ipſorum cum ipſis numeris faciant 20, fac ut in præcedenti, & habebis aggregatum ℞ 20 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, quod eſt 5, & quia quadrata partium cum ipſis numeris debent æquari 20, igitur quadrata ipſa ſola abſq; numeris erunt 15, fac igitur ex 5 duas partes, quarum quadrata iuncta ſint 15, & habebis numeros quos uides memineris autem, quod in prima operatione, quando perueneris ad 1 quadratum m: 2 poſitionibus, pro aggregato quadratorum, ut addas 1 poſitionem, quod eſt aggregatum numerorum, & peruenies ad 1 quadratum m: 1 poſitione, æqualia 20.

| 2 $\frac{2}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$
| 2 $\frac{1}{2}$ m: 1 $\frac{1}{4}$

QVÆSTIO IIII.

Inuenias duos numeros, qui inuicem ducti producant aggregatum, & diuiſo 12 per utrumq;, quadrata prouenientium iuncta cum aggregato diuidentium faciant 80, hæc cū præcedentibus eſt fratris Lucę, in quodam ſcripto quod perierat. Pone aggregatum rem unam eam diuide in partes, producentes rem unam, & habebis partes, ut uides, cum quibus diuide 12, ut in figura.

Partes | $\frac{12}{\frac{1}{2} \text{ poſ. p: ℞ v: } \frac{1}{4} \text{ q̄d. m: 1 poſ.}}$ $\frac{12}{\frac{1}{2} \text{ poſ. m: ℞ v: } \frac{1}{4} \text{ q̄d. m: 1 poſ.}}$

q̄drata partiū | $\frac{144}{\frac{1}{2} \text{ q̄d. m: 1 poſ. p: ℞ v: } \frac{1}{4} \text{ q̄d'q̄d. m: 1 cub.}}$ ⨯

⨯ $\frac{144}{\frac{1}{2} \text{ q̄d. m: 1 poſ. p: ℞ v: } \frac{1}{4} \text{ q̄d'q̄d. m: 1 cub.}}$

Aggregatum q̄dratorum $\frac{144 \text{ q̄d. m: 288 poſ.}}{1 \text{ quad.}}$

Igitur ex partibus ipſis factis quadratis, iunctiſq;, ut in quinto libro docui te, habebis aggregatum quadratorum, cui adde aggregatum diuidentium, ſiquidem rem unam habebis, $\frac{144 \text{ q̄d. m: 288 poſitionib9}}{1 \text{ quad.}}$

p: 1

p:1 poſitione,æqualia 80,multiplica omnia per poſitionem,fient 144 poſitiones m:288 p:1 quadrato,ęqualia 80 poſitionibus,quare q̃dratum & 64 poſitiones,æquantur 288,res igitur eſt ℞ 1312 m:32, fac igitur ex ℞ 1312 m:32,duas partes,producentes ℞ 1312 m:32,& illæ erunt numeri quæſiti.

Quæstio v.

Inuenias duos numeros,quorum quadrata iuncta ſint 20, & productum unius in alterum,æquale ſit q̃drato differentiæ,hæc quamq; clara ſit,quoniam neceſſarie ſit eos numeros eſſe in proportione,quę dicitur habere medium & duo extrema. Poſsit etiam ſolui ex regula poſitionis æqualis,nam plures quæſtiones,multis ac diuerſis regulis ſolui poſſunt. Sic tamen ex hac regula faciemus,poſito aggregato re, diuidemus eam in partes,quarũ quadrata iuncta ſint 20, & erũt ut uides, igitur quadratum differentiæ eſt 40, m:1 quadrato,& hoc æquatur producto partium inuicem,quod eſt $\frac{1}{2}$ quadratum m:10,quare 1 $\frac{1}{2}$ quadratum,

$\frac{1}{2}$ poſ.p:℞ v:10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
$\frac{1}{2}$ poſ.m: ℞ v:10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
Differentia ℞ v:40 m:1 q̃d.
Quad.differẽtię 40 m:1 q̃d.
ꝓductum $\frac{1}{2}$ quad.m:10

æquatur 50,igitur res eſt ℞ 33 $\frac{1}{3}$, ex hoc fac duas partes, quarum q̃drata iuncta ſint 20,& erunt ℞ 8 $\frac{1}{3}$,p:℞ 1 $\frac{2}{3}$,& ℞ 8 $\frac{1}{3}$ m:℞ 1 $\frac{2}{3}$. Et ex hac regula deducuntur octo quæſtiones,quas ego ob uehementem ſimilitudinem Sorores appellaui,ad capitula melius,quàm alia.

Sequuntur octo quæſtiones, quæ uocantur Sorores,q̃rũ ultima ſola pro aliarum exemplo declaratur.

Quæstio vi.

Inuenias duos numeros,quorum quadrata iuncta ſint 10, & cubi ſint 30,pones aggregatum numerorum poſitionem, & facies partes ex ea,quarum quadrata iuncta ſint 10,inde iunge cubos illarum partium,& habebis cubum p:60,æqualia 30 rebus.

Quæstio vii.

Inuenias duos numeros,quorum quadrata iuncta ſint 10,& differentia cuborum illorum ſit 15, pone aggregatum eorum ut prius, rem, & habebis 1 cub'q̃dratum,æq̃le 300 q̃dratis p:1100.

Quæstio viii.

Inuenias duos numeros,quorum quadrata iuncta ſint 10, & ex ductu cuiuslibet eorum in quadratum alterius, producta iuncta faciant 20,pones eodem modo aggregatum numerorum,rem,& habebis 1 cub'q̃dratum p:300 quadratis p:800 poſitionibus,æqualia 40 q̃d'q̃dratis p:1600.

QVÆSTIO IX.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta ſint 10, & producta unius in alterius quadratum mutuo, differant per 4. Pones ut prius aggregatum, rem, & habebis 1 cub'q̄dratum p: 500 quadratis æqualia 40 q̄d'q̄dratis p: 1936.

QVÆSTIO X.

Inuenias duos numeros, quorum differentia quadratorum ſit 10, & cuborum aggregatum ſit 100. Pones aggregatum numerorum, rem, & facies ex ea partes, quarū quadrata differant in 10, & eas duces ad cubū, & habebis 1 q̄d'q̄dratum p: 300, æq̄lia 400 poſitionibꝰ.

QVÆSTIO XI.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia ſit 10, & cuborum differentia ſit 100. Pones ut prius, aggregatum numerorum, rem, & habebis 1 q̄d'q̄dratum p: 33 $\frac{1}{3}$, æqualia 13 $\frac{1}{3}$ cubis.

QVÆSTIO. XII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorū differentia ſit 10, & aggregatum productorum unius in quadratum alterius mutuo, ſit 100. Pones ut prius aggregatum illorum, rem, & habebis 1 q̄d'q̄dratum æquale 400 rebus p: 100.

QVÆSTIO XIII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia ſit 10, & differentia productorum unius in alterius quadratorum, ſit 100, hanc explicabo diligenter, ut ſit forma operandi, atq; exemplar in reliquis, non ſolum ſeptem procedentibus, ſed & alijs multis, quæ formari poſſunt in hoc genere. Ponam igitur illorum aggregatum, rem, & per regulam de modo, uel capituli operationū in ſexto libro, faciam ex ea duas partes, quarum quadratorū differentia ſit 10, & eſt, ut diuidas illam differentiā ſcilicet 10, per duplum diuidendi, quod eſt 2 poſitiões, exiens quod eſt $\frac{5}{1\ \text{poſ.}}$, addes & minues dimidio diuidendi, quod eſt $\frac{1}{2}$ poſitio, habebis partes, & quadrata illarum, quę ſuppone permutato ordine ſuis radicibus, ut in figura patet, duces igitur inferiora in ſua ſuperiora, ſufficitq; in his, quorū uolumus differentiā multiplicare, partes diſsimiles, id eſt quæ in uno ꝓducāt p: in alio m: ſicut in aggregandis ſufficit multiplicare partes ſimiles, nam reliquæ per ſe cadunt, duc igitur

$\frac{1}{2}$ poſ. p: $\frac{5}{1\ \text{poſ.}}$	$\frac{1}{2}$ poſ. m: $\frac{5}{1\ \text{poſ.}}$
$\frac{1}{4}$ q̄d. p: $\frac{25}{1\ \text{q̄d.}}$ m: 5	$\frac{1}{4}$ q̄d. p: $\frac{25}{1\ \text{q̄d.}}$ p: 5
2 $\frac{1}{2}$ poſ. m: 1 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{4}$ poſ. m: 2 $\frac{1}{2}$
poſ. m: $\frac{125}{1\ \text{cu.}}$	poſ. p: $\frac{125}{1\ \text{cu.}}$
Differentia 2 $\frac{1}{2}$ poſ. m: $\frac{250}{1\ \text{cu.}}$ æq̄lia 100	
1 q̄d'q̄d. æquale 40 cub. p: 100	

igitur $\frac{1}{2}$ poſitiōe in m: 5, & $\frac{5}{1 \text{ Pol.}}$ in $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{25}{1 \text{ q̄d.}}$, q̄a ubi una producit p: alia producit m: & detrahe m: à p: & hoc non eſt aliud, quàm duplicare unum illorum productorum, habebis differentiam unius producti ab altero, $2\frac{1}{2}$ poſitiones m: $\frac{250}{1 \text{ cu.}}$, igitur hoc ę̄q̄tur 100, diuide omnia per $2\frac{1}{2}$, & multiplica per 1 cubū, habebis 1 q̄d q̄dratū æquale 40 cubis p: 100, & ita in alījs, & poſſes ſuper hoc ſtatuere regulam de modo, dicendo, cū duo numeri, quorum quadratorū differentia eſt conſtituta ex multiplicatione uiciſsim in q̄drata, debent producere aliquam differentiam inter ipſa producta, tunc erit q̄d' q̄dratū æquale q̄drato differentiæ q̄dratorum, & totidem cubis, quotus eſt numerus, qui prouenit, diuiſo numero differentiæ productorum per quartam partem differentiæ q̄dratorum, uelut ſi dicā, inuenias duos numeros quorum quadratorum differentia ſit 6, & productorum unius in quadratum alterius differentia ſit 60, dicemus igitur 1 q̄d' q̄dratum æquabitur 40 cubis p: 36, & ita de alījs.

Regvla II.

Eſt & alius modus regulæ aggregati, longe ſubtilior præcedente, 2
& facit duas poſitiōes ſimul & duas conuerſiones, & nihil eſt ſubtilius his in regulis, & inueni ipſum in quodā fragmento fratris Lucę, & tandem reduxi ipſum poſt multos labores, quia uix poterat legi in hac parte, uel percipi imago huius regulę, & ego explicabo eam faciliter, & niſi eſſet, quod non eſt multum generalis hic modus, quantum ad oſtendendam æſtimationē rei, licet quo ad poſitionē ſit ampliſsimus, nihil aliud poſſet excogitari præſtantius, & exemplū ac regula erit in quæſtionibus.

Qvæstio XIIII.

Inuenias duos numeros, ex quorū ductu unius in alterū producatur 8, & q̄drata iuncta cū ipſis numeris, faciant 40. Pones aggregatū illorum numerorum $\frac{1}{2}$ quantitatem, & alterum ex illis 1 poſitionem, reliquus igitur eſt $\frac{1}{2}$ quantit. m: 1 poſitione, duc inuicē, fiunt $\frac{1}{2}$ quan' poſ. m: 1 q̄drato, & hoc æq̄tur 8, igitur habes q̄dratū p: 8, æq̄le quantitati, cuidam rerum. Sequere igitur capitulum, accipe dimidiū numeri rerum, id eſt $\frac{1}{4}$ quantitatis, ut in capitulo quinto doceris, quando q̄dratū & numerus ęquantur rebus, duc igitur $\frac{1}{4}$ quantitatis in ſe, fit $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: abījce 8, numerū æq̄tionis, fit $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: m: 8, accipe ℞ v: quam adde, ac minue, ad $\frac{1}{4}$ quantitatis, dimidium numeri rerum, fiet rei æſtimatio, ſeu numeri quæſiti, quorum unus eſt, $\frac{1}{4}$ quantitatis p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ quad' quan' m: 8, & alter, $\frac{1}{4}$ quantitatis m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ quad' quan' m: 8, horum igitur quadrata, addito aggregato nu-

merorum, id eſt $\frac{1}{2}$ quantitatis, æquantur 40, quadrata igitur partium, cadentibus uiciſsim multiplicationibus $\frac{1}{4}$ quantitatis in ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: m: 8, quia ſunt æqualia, m: & p: erunt $\frac{1}{8}$ q̄d' quan: m: 8, & $\frac{1}{8}$ q̄d' quan: m: 8, iuncta igitur $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: m: 16, æqualia cum $\frac{1}{2}$ quantitatis, aggregato numerorū ad 40, pone igitur pro quantitate rem, erit $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{1}{2}$ poſitione, ęquale 56, igitur 1 quadratum p: 2 poſitionibus, æquatur 224, quare res ualet ℞ 225 m: 1, id eſt 14, & tantundē ualet quantitas, ſed nos poſuimus dimidiū quantitatis aggregatum, igitur aggregatum numeror℞ eſt 7, fac ex 7 duas partes, ex quarum ductu inuicem fiat 8, & erunt 3 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 4 $\frac{1}{4}$, & 3 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 4 $\frac{1}{4}$, numeri quæſiti, quorum quadrata numeris ipſis ſunt 40.

$\frac{1}{2}$ quan:
1 poſ. | $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 poſ.
$\frac{1}{2}$ quan: poſ. m: 1 q̄d.
æqualis 8
$\frac{1}{4}$ quan:
$\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 8
$\frac{1}{4}$ q̄n: p. ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d: q̄n: m: 8
$\frac{1}{4}$ q̄n: m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. q̄n: m. 8
$\frac{1}{8}$ q̄d. quan: m: 8
$\frac{1}{8}$ q̄d quan: m: 8
$\frac{1}{2}$ quan:
$\frac{1}{4}$ q̄d. q̄n. m: 16 p: $\frac{1}{2}$ quan:
æqualis 40
1 q̄d. quan. p: 2 quan: æqualis 224
æſtimatio rei ℞ 225 m: 1

Not^m. Et ſi quis quærat, quid proſit hæc regula, cuiq́ poſsit opitulari præter primam? Reſpondeo, Prima indiget regula particulari ſexti libri in operando, hæc autem libere uſq́ in finem agit, deducēdo, quod quàm pulcherrimum ultra id quod utiliſsimum eſt, nullo alieno indigere præſidio. Eſt & aliud exemplum.

Quæſtio XV.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producatur 6, & quorum cubi iuncti faciant 100. Ponemus $\frac{1}{2}$ quantitatē pro aggregato, & partem unam rem, alia erit $\frac{1}{2}$ quantitatis m: re, duc partes inuicem, habebis $\frac{1}{2}$ quan' poſ: m: 1 quadrato, ęqualia 6, ſequere ęquationem tanq́ $\frac{1}{2}$ quantitas eſſet aliquis numerus, & habebis æſtimationem, duas æſtimationes poſ. ſcilicet, $\frac{1}{4}$ quantitatis p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: m: 6, & $\frac{1}{4}$ quantitatis m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: m: 6, horum cubi debent æquari 100, duc ad cubum, dimittendo partes, quæ in uno ſunt p: in alio m: habebis $\frac{1}{16}$ cub' quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quantitatibus pro ſin-

$\frac{1}{2}$ quan:
1 poſ. | $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 poſ.
$\frac{1}{2}$ quan: poſ: m: 1 q̄d.
æqualis 6

$\frac{1}{4}$ quan: p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 6 | poſ.
$\frac{1}{4}$ quan: m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 6 | poſ.
$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quan: | cubus
$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quan: | cubus
$\frac{1}{8}$ cub. quan: m: 9 quan: æq̄lia 100
1 cub. æqualis 72 res p: 800

ſingulis partibus, quare in totũ $\frac{1}{8}$ cub'quan:m:9 quantitatibus, æqualia 100, permuta cub'quan: in cubum rei, & quantitatem in rem, & reduces ad 1 cubum, habebis cubum, æqualem 72 rebus p:800, & rei æſtimatio erit æſtimatio quantitatis, ſcilicet ℞ v: cubica 400 p: ℞ 146176 p:℞ v: cubica 400 m: ℞ 146176, huius igitur dimidium, quod eſt ℞ v:cubica 50 p:℞ 2284 p:℞ v:cubica 50 m:℞ 2284 eſt aggregatum quæſitorum numerorum, & partes ſunt, ℞ v:cubicæ quæſitæ, ſed hoc apparet alia operatione.

Quæstio xvi.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia ſit 10, & ex maiore illorum iuncto cum ſuis quadratis, fiat 40. Pones aggregatum numerorum rem, & unam partem $\frac{1}{2}$ quantitatem, reliqua erit res m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, duc in ſe partes, habebis $\frac{1}{4}$ q̄d'quan: & 1 q̄dratum p: $\frac{1}{4}$ q̄d'quan:m: 1 quan'poſ. ſume differentiam, quæ erit 1 quan'poſ. m: 1 q̄d. & hoc æq̄tur 10, igitur rei æſtimatio eſt $\frac{1}{2}$ quantitas p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d'quan:m: 10, & $\frac{1}{2}$ quantitas m:℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d'quan: m: 10, horũ quoduis æquatur 1 poſitioni, & iam poſitio diuiſa fuit in $\frac{1}{2}$ quantitatem, & poſitionem m: $\frac{1}{2}$ quantitate, igitur cum $\frac{1}{2}$ quantitas ſit communis utrobiq;, erit ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d'quan:m: 10, æqualis 1 poſitione m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, igitur quadrata partium, quæ ſunt $\frac{1}{4}$ q̄d'quan: & $\frac{1}{4}$ q̄d'quan:m: 10, cum una partium, ſcilicet $\frac{1}{2}$ quantitate, æquantur 40, quare 1 q̄d'quan: p: 1 quantitate, æquatur 100, res igitur quæ eſt quantitas, eſt ℞ 100 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & quia nos poſuimus $\frac{1}{2}$ quantitatis, erit una pars, ℞ 25 $\frac{1}{16}$ m: $\frac{1}{4}$, dimidium ſcilicet ℞ 100 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & minor erit ℞ v: 15 $\frac{1}{8}$ m:℞ 6, $\frac{17}{64}$. Et generaliter in hac regula, qui plus ualet ingenio, plus ualet in operatione, nam modi ſunt complures, & de omnibus dicere longũ foret, iſta igitur ſufficiant, & ad exempla primæ regulæ denuo tranſeamus, Quærentes hoc modo.

1 poſ.
$\frac{1}{2}$ quan: | 1 poſ. m: $\frac{1}{2}$ quan:
$\frac{1}{4}$ q̄d'quan: | 1 q̄d. p: $\frac{1}{4}$ q̄d. quan: m: 1 quan: poſ.
$\frac{1}{2}$ quan:p:℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d'q̄n:m: 10 | poſ.
$\frac{1}{2}$ quan:m:℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d'q̄n:m: 10 | poſ.
$\frac{1}{4}$ q̄d'quan: | $\frac{1}{4}$ q̄d'q̄n:m: 10 | $\frac{1}{2}$ quan:
1 q̄d'quan:p: 1 quan: æquantur 100

Quæstio xvii.

Inuenias duos numeros, quorum quadratum ſecundi, æquale ſit ductui primi in aggregatum, & quadrata illorum iuncta ſint 10, uides manifeſte, quod ſi ponatur aggregatum illorum res, ipſa erit diuidenda ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema, eruntq; partes, ℞ v: $\frac{5}{4}$ quadrati m: $\frac{1}{2}$ poſitionis, & 1 $\frac{1}{2}$ poſitiones m: ℞ v: $\frac{5}{4}$ quadrati, harum igitur quadrata erunt 5 quadrata m: ℞

20

20 q̄d'q̄dratorum, & erunt æqualia 10, igitur ex capitulo argumentandi p: & m: 5 quadrata m: 10, æquantur ℞ 20 q̄d'q̄dratorum, quare partes erunt ut uides.

℞ v: 2 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 5 p: ℞ v: 2 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5
℞ v: 2 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 5 m: ℞ v: 2 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5

QVÆSTIO XVIII.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum primus & ſecundus æquentur tertio, & quadrata primi & ſecundi iuncta, ſint 10. Pones tertiũ 1 poſitionem, fac de 1 poſitione duas partes, quarum quadrata iuncta ſint 10, & erunt $\frac{1}{2}$ poſitionis p: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ poſitio m: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, duc 1 poſitionem in minorem, & producetur quadratum maioris, aliter diuides 1 poſitionem ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema, inde duces partes ad quadratum, & quadrata iuncta erũt 10, partes igitur erunt.

p^a	℞ v: 22 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 405 m: ℞ v: 12 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 125
2^a	℞ v: 12 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 125 m: ℞ v: 2 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 5
3^a	℞ v: 10 p: ℞ 80.

QVÆSTIO XIX.

Similiter, ſi quis dicat, inuenias tres numeros, proportionales, ex quorũ ductu primi in ſecundum fiat 10, & primus cum ſecundo æquentur tertio, eodem modo procedendo habebis quantitates.

p^a	℞ v: ℞ 31 $\frac{1}{4}$ p: 5 m: ℞ v: ℞ 31 $\frac{1}{4}$ m: 5
2^a	℞ v: ℞ 31 $\frac{1}{4}$ p: 5 p: ℞ v: ℞ 31 $\frac{1}{4}$ m: 5
3^a	℞ v: ℞ 500 p: 20

De regula liberæ poſitionis. Caput XXXVI.

ESt regula pro quæſtionibus, quæ conſequuntur proprietates numerorum uniuerſales, quas homo ignorat, inde quærens per alias regulas, laborat inaniter, non enim proportionem exigunt, nec tamen in omnibus quantitatibus inueniri queunt, tales autem ſunt.

QVÆSTIO I.

Inuenias quinq; quantitates, quarum ſecundæ q̄dratum, æquale ſit aggregato earum, cum quadrato primæ, ſintq; hæ quantitates continue proportionales, ponam igitur in quacunq; uoluero proportionẽ, ab una poſitione inchoando, uelut in figura uides, eritq; in dupla (exempli gratia) quadratum ſecundæ, 4 quadrata, & hoc æquatur 1 quadrato quod eſt qua

1 q̄d.	1 poſ.
4 q̄d.	2 poſ.
	4 poſ.
	8 poſ.
	16 poſ.
3 q̄d.	æq̄lia
31 poſ.	

dra-

dratũ primæ & 31 rebus, igitur 3 q̃dratã æq̃ntur 31 rebus, & res erit $10\frac{1}{3}$, & reliquæ ſecundũ duplam proportionẽ, ut uides, $10\frac{1}{3}$, $20\frac{2}{3}$, $41\frac{1}{3}$, $82\frac{2}{3}$, $165\frac{1}{3}$.

Qvæstio II.

Inuenias duos numeros, in proportione dupla, quorum quadrata, uel cubi, uel relati, ſint æqualia ipſis, & ſit exemplum de relatis, tanquam magis admirandis. Ponemus igitur in ꝓportione dupla, 1 poſitionem & 2 poſitiones, quorum relata erunt, 32 relata prima, & 1 relatum primũ, iunge, fient 33 relata prima, æqualia 3 rebus, igitur per capitulum ſimplex, res erit ℞'℞ $\frac{1}{11}$, diuiſo 3 per 33, reliqua quantitas igitur erit ℞'℞ $1\frac{5}{11}$, ſcilicet duplum ℞'℞ $\frac{1}{11}$.

Qvæstio III.

Inuenias tres quantitates proportionales, quarum proportio ſit tripla, & $\frac{1}{4}$ aggregati, in ſe ductum, producat $\frac{1}{7}$ ſecundæ quantitatis. Ponemus igitur quantitates, 1 poſitionẽ, 3 poſ. 9 poſ. harum aggregatum eſt 13 poſitiones, cuius $\frac{1}{4}$ eſt $3\frac{1}{4}$ poſitiones, & quadratum eſt $10\frac{9}{16}$, & hoc eſt $\frac{1}{7}$ de 3 poſitionibus, igitur $73\frac{15}{16}$ quadrata, ęquantur 3 poſitionibus, quare poſitio eſt $\frac{48}{1183}$, & quantitas ſecũda erit $\frac{144}{1183}$ & tertia erit $\frac{432}{1183}$.

Qvæstio IIII.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum ſecundus ſit 10, & $\frac{1}{20}$, aggregati omnium in ſe ductum, producat ſeptuplum ſecundi, ponemus primum rem, igitur tertius erit $\frac{100}{1 \text{ pol.}}$, & quia $\frac{1}{20}$ aggregati in ſe ductũ, producit ſeptuplum ſecundi, igitur producit 70, & ℞ 70, eſt $\frac{1}{20}$ aggregati, igitur aggregatum eſt ℞ 28000, & ideo prima & tertia, erunt ℞ 28000 m: 10, & hoc æquale eſt 1 poſitioni p: $\frac{100}{1 \text{ pol.}}$, igitur 1 q̃dratum p: 100, æquatur poſitionibus ℞ 28000 m: 10, igitur prima quantitas fuit ℞ 7000 m: 5 m: ℞ v: 6925 m: ℞ 700000, & tertia quantitas erit ℞ 7000 m: 5 p: ℞ v: 6925 m: ℞ 700000, poſſet etiam breuius fieri, ſed abſq; poſitione.

De regula falſum ponendi. Cap. XXXVII.

Regvla I.

HÆc regula triplex eſt, aut eñi ponit m: aut quęrit ℞ m: aut quęrit quod nõ eſt. Primo igitur quęrimus quęſtionũ ſolutiões, quæ per p: uerificari minime poſſunt, uelut ſi quis dicat, q̃dratũ æq̃tur 4 rebus p: 32, & in eadẽ æſtimatione, q̃dratũ æq̃tur 1 rei p: 20, tunc ſi uelles ſequi æſtimationẽ uerã, in prima res eſſet 8, in ſecunda autem quæſtione 5, ſed ſi dicas conuertendo igitur quadratum p: 4 rebus, æquatur 32, & res erit 4, & in hoc

etiam uerum erit, quòd quadratum & res, æquantur 20, dic igitur, ſi 4 p: ſeruit his quæſitis, igitur 4 m: eſt æſtimatio 1 q̄drati, æqualis 4 rebus p: 32, & 1 quadratum æquale 1 rei p: 20, ideo conuertes capitula, ut in primo capitulo diximus, & ſi caſus eſt impoſsibilis, in utroq; quæſtio falſa eſt, per p: & per m: & ſi uera eſt, per p: in uno, erit uera per m: in alio, & eiuſcemodi generis eſt quæſtio hæc.

QVÆSTIO I.

Dos uxoris Franciſci, eſt aurei 100 plusq; Franciſci peculium, & dos uxoris eius in ſe ducta, eſt aurei 400 plus peculio Franciſci in ſe ducto, quæritur dos, & peculium. Ponemus Franciſcum habere rem unam m: igitur dos uxoris eſt aurei 100 m: 1 re, duc partes in ſe, fient 1 q̄dratum & 10000, p: 1 quadrato m: 200 poſitionibus, horũ differentia eſt 400 aurei, igitur 1 quadratum p: 400 p: 200 poſitionibus, æq̄tur 10000 p: 1 quadrato, abijce communia, habebis 9600, æqualia 200 poſitionibus, igitur res eſt 48, & tantũ habuit m: id eſt debiti, & dos erit reſiduũ ad 100, ſcilicet 52, igitur Franciſcus habuit 48 aureos debiti, ſine ullo capitali uel peculio, & dos eius uxoris fuit 52 aureorum, & ſecus operando peruenires ad quæſtiones difficillimas, ac inextricabiles. Taliſmodi etiã hæc eſt.

m: 1 poſ.	100 m: 1 poſ.
1 q̄d.	10000 p: 1 q̄d. m: 200 poſ.

differentia 10000 m: 200 poſ. æqualis 400

QVÆSTIO II.

Ego habeo aureos 12 plus Franciſco, & cubus meorum eſt, 1161 aurei plus cubo Franciſci, ponatur 1 res m: Franciſco, ego habeo 12 aureos m: 1 poſitione, duc ad cubum partes, fient 1 cubus m: & 1728 p: 36 q̄dratis m: 432 rebus m: 1 cubo, & horum differentia, eſt 1161, igitur 1 cubus m: p: 432 rebus p: 1161, ęquabitur 1728 p: 36 quadratis m: 1 cubo, abijce m: 1 cubum & 1161 ex utraq; parte, fient 432 res æq̄les 36 q̄dratis p: 567, quare 1 q̄dratũ p: 15 $\frac{3}{4}$, æq̄lia 12 rebus, igitur res eſt 1 $\frac{1}{2}$, & hoc habuit m: Fránciſcus, & ego 10 $\frac{1}{2}$ p: & tot ſunt aurei q̄ſiti.

QVÆSTIO III.

Et eodem modo, ſi dicam etiam ſic, aurei mei ſunt 12 p: quàm illi Franciſci. Et q̄dratum meorum eſt 128 p: cubo aureorum Franciſci, dabimus rem unam m: Franciſco, ego uero habeo 12 aureos m: 1 re, & quadratum meorum erit 144 p: 1 quadrato m: 24 rebus, & hoc æquale eſt m: 1 cubo p: 128, igitur 16 p: 1 quadrato p: 1 cubo, æquatur 24 rebus, Et res erit 4 m: & tantum habet Franciſcus debiti, ego uero aureos 8 peculij.

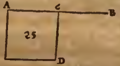
REGVLA II.

Secundum genus poſitionis falſæ, eſt per radicem m: Et dabo exemplum,

exemplum,ſi quis dicat,diuide 10 in duas partes,ex quarum unius in reliquam ductu,producatur 30,aut 40, manifeſtum eſt, quòd caſus ſeu quæſtio eſt impoſsibilis,ſic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia,& fiet eius medietas 5,duc in ſe fit 25, auferes ex 25, ipſum producendum, utpote 40,ut docui te,in capitulo operationum, in ſexto libro,fiet reſiduum m: 15,cuius ℞ addita & detracta à 5,oſtendit partes,quæ inuicem ductæ producunt 40,erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15,& 5 m: ℞ m: 15.

Demonstratio

Vt igitur regulæ ucrus pateat intellectus,ſit A B linea,quę dicatur 10, diuidenda in duas partes,quarū rectangulum debeat eſſe 40, eſt aūt 40 q̄druplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B,igitur fiat A D,quadratum A C,dimidij A B,& ex A D auferatur quadruplum A B,abſq; numero,℞ igitur reſidui,ſi aliquid maneret, addita & detracta ex A C,oſtenderet partes,at quia tale reſiduum eſt minus,ideo imaginaberis ℞ m: 15, id eſt differentiæ A D, & quadrupli A B,quam adde & minue ex A C,& habebis quæſitum,ſcilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, ſeu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15,duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimiſsis incruciationibus,fit 25 m: m: 15,quod eſt p: 15,igitur hoc productum eſt 40,natura tamē A D,non eſt eadem cū natura 40,nec A B, quia ſuperficies eſt remota à natura numeri,& lineæ,proximius tamē huic quantitati,quę uere eſt ſophiſtica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid ſit eſt,ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo,& à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū,in hoc caſu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40,fit 65,ab huius ℞ minue 5,& adde etiam 5,habebis partes ſecundum ſimilitudinem,℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10,non iuncti faciunt 10,ſed ℞ 260,& hucuſq; progreditur Arithmetica ſubtilitas,cuius hoc extremum ut dixi,adeo eſt ſubtile,ut ſit inutile. 2



5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̄d. eſt 40

Quæstio IIII.

Fac de 6 duas partes,quarum quadrata iuncta ſint 50, hæc ſolui tur per primam,non per ſecundam regulam,eſt enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in ſe,fit 9,minue ex dimidio 50,quod eſt 25,fit re-

ſiduum 16, cuius ℞ 4, adde & minue à 3, dimidio 6, fiunt partes 7, & 1 m: harum quadrata iuncta ſunt 50, & aggregatum eſt 6.

QVÆSTIO V.

Per idem ſoluitur quæſtio hæc, fac ex 6 duas partes, quarum una in reliquam ducta, producatur m: 40, duc 3, dimidium 6, in ſe, fit 9, adde ad 40, fit 49, huius ℞ quæ eſt 7, adde ad 3, dimidium 6, & minue, habebis 10 p: & 4 m: quæ ducta inuicem, producunt 40 m: & iuncta, faciunt 6, & ita 10, m: & 4 p: producant 40 m: & iuncta, faciunt 6 m: ideo etiam hæc quæſtio, eſt de puro m: & pertinet ad primam regulam.

Corm. Ex hoc patet, quod ſi quis dicat, fac de 6 duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem, producatur 40, quæſtio eſt de m: ſophiſtico, & pertinet ad ſecundam regulam. Et ſi dicat, fac de 6 duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem producatur 40 m: uel ex 6 m: fiant duæ partes producentes m: 40, utroque modo erit quæſtio de m: puro, & pertinebit ad primam regulam, & tales partes erunt quæ dictę ſunt, & ſi dicat, quod ex 6 m: fiant duæ partes, quarum productum fit 40 p: quæſtio erit de m: ſophiſtico, & pertinebit ad ſecundam regulam, & erunt partes m: 3 p: ℞ m: 15, & m: 3 m: ℞ m: 15.

REGVLA III.

Poſſumus uero uenari genus m: aliud, quod neque eſt purum m: neque ℞ m: ſed res omnino falſa, & cõponitur hæc regula quaſi ex ambobus, & dabo huius unum exemplum, quod eſt hoc.

QVÆSTIO VI.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum ℞ primi detracta à primo, faciat ſecundum, & ℞ ſecundi, detracta à ſecundo, faciat tertium. Ponemus igitur primum, 1 quadratũ, & ſecundus erit 1 q̃d. m: 1 poſitione, & tertius erit 1 q̃d. m: 1 poſitione m: ℞ v: 1 quadrati m: 1 poſitione, duc primum in tertium, & ſecundum in ſe, habebis quantitates ipſas, operando ut uides, & productum primi in tertium, eſt m: $\frac{1}{16}$ p: ℞ $\frac{1}{64}$, quod eſt $\frac{1}{8}$ m: $\frac{1}{16}$, & tantum fit ducto ſecundo numero in ſe.

$\frac{1}{4}$	m: $\frac{1}{4}$	m: $\frac{1}{4}$ m: ℞ m: $\frac{1}{4}$

Quomodo excidant partes & denominationes multiplicando. Cap. XXXVIII.

REGVLA I.

ETſi hoc & generale ſit, & abunde in libro quarto & quinto demonſtratum, nihilominus denuo ad facilitatem & utilitatem repetendum erit, fit autem hoc duobus modis, totidemque

tidemq́ regulis indigemus, quarum prima particularis eſt, & inuenta cauſa capitulorum illorum, quæ poſtmodum Geometrica ratione, in quatuor denominationibus ſuperius à nobis ſunt demonſtrata, nūc inuentis illis, eius utilitas magna ex parte extincta eſt, docebimus tamē eam ob artis locupletationem, & ingenij eius admirationem, cum etiam ad alia utilis ſit, ad quæ transferri commode poteſt, quanq́ nullo uſui generali poſsit cōuenire. Igitur eius regula hęc eſt, Vel uis numeros differentes, quorum quadratum unius, cū cubo alterius faciant iuncti, numerū, tunc diuides differentiam illam in duas partes, quarum triplum quadrati unius, ſit æquale duplo alterius, per poſitionem, inde inuentis partibus, pones rem, p: parte, cuius ſumitur triplum quadrati, pro parte cubanda, & partem quadrandam, rem m: parte, cuius ſumitur duplum, inde peracta operatione, peruenies ad cubum, ac quadrata æqualia numero, excidentibus rebus.

Quæstio I.

Exemplum. Inuenias duos numeros, quorum differentia ſit 8, & cubus unius, cum alterius q̄drato iunctus, faciat 100, fac p° per poſitionē duas partes, quarū triplum q̄drati unius, ſit ęq̄le duplo alterius, quas inuenies eſſe, 2 & 6, nam triplum 4, q̄drati 2, eſt 12, quod eſt duplum 6 reſidui, igitur pones partem cubandā poſitionē p: 2, & q̄drandam poſitionem m: 6, iunge cubū 1 poſitionis, p: 2, cum q̄drato 1 poſitiōis m: 6, habes 1 cub. p: 7 q̄dratis p: 44, æq̄lia 100, igitur 1 cub. p: 7 q̄dratis, æq̄tur 56, & rei æſtimatio, erit ℞ v: cubica 15 $\frac{8}{27}$ p: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cubica 15 $\frac{8}{27}$ m: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ m: 2 $\frac{1}{3}$, & quia partes fuerūt, res p: 2, & res m: 6, ideo huic adde 2, & minue 6, habebis partes, ut uides à latere. Eſt aūt manifeſtum, quod una illarum eſt m: purum, & ſi uoluiſſes ut eſſent ambę p: oportuiſſet ponere, quòd cubus & q̄dratum talium numerorum æquarentur numero maiori, ut puta 1000, loco 100.

poſ. p: 2
poſ. m: 6
cub. p: 12 poſ. p: 6 q̄d. p: 8
m: 12 poſ. p: 1 q̄d. p: 36
cub. p: 7 q̄d. p: 44
æqualis 100

| ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ p: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ m: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ m: $\frac{1}{3}$
| ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ p: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ m: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ m: 8 $\frac{1}{3}$

Et eodem modo facies, ſi uolueris, quod numerorum differentiū in aliquo numero, cubus & quadratum differant in aſsignato numero, eadem regula inuenies partes differentiæ, quibus inuentis, pones econtra, ſcilicet poſitionem m: numero, cuius ſumitur triplum q̄drati, & poſitionem p: numero, cuius ſumitur duplum, inde ſequeris operationem, ut in exemplo.

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, quorũ differẽtia ſit 8, & differẽtia cubi unius, à q̄drato alterius, ſit 100, facies ex 8 duas partes, ut dictũ eſt, & erũt 2, & 6, pones igit̃ rem m: 2, & rẽ p: 6, cuba rem m: 2, & q̄drata rem p: 6, & ſume differentiam habebis cubũ m: 7 quadratis m: 44, æqualem 100, quare cubus æquabitur 7 quadratis p: 144, & rei æſtimatio erit ℞ v: cubica $84\frac{19}{27}$ p: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica $84\frac{19}{27}$ m: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: $2\frac{1}{3}$, & quia nos poſuimus partes, rem m: 2, & rem p: 6, erũt numeri quæſiti, ut uides.

poſ. m: 2
poſ. p: 6
cub. p: 12 poſ. m: 6 q̄d. m: 8
p: 12 poſ. p: 1 q̄d. p: 36
cub. m: 7 q̄d. m: 44
æqualis 100

Et ſimiliter, ſi dicat, duas fac partes ex aliquo numero, quorum quadratum unius, cum cubo alterius iunctum, faciat aliquem numerum, facies enim duas partes ex numero diuidendo, ut ſupra, quarum uni, ſcilicet cuius ſumitur triplum quadrati, addes rem, alteri cuius ſumitur duplum ipſius, detrahes rem, indé perficies operationem, ut in exemplo.

| ℞ v: cu. $84\frac{19}{27}$ p: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cu. $84\frac{19}{27}$ m: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{3}$
| ℞ v: cu. $84\frac{19}{27}$ p: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cu. $84\frac{19}{27}$ m: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: $8\frac{1}{3}$

QVÆSTIO III.

Fac ex 8 duas partes, quarum cubus unius, cum quadrato alterius, faciat 400, facies ex 8 duas partes, ut prius, quæ erunt 6 & 2, & pones 2 p: re, & 6 m: re, duces 2 p: 1 poſitione ad cubum, & 6 m: 1 poſitione ad quadratum, habebis iungendo 1 cub. p: 7 quadratis p: 44, æqualia 400, igitur 1 cub. p: 7 quadratis, æquatur 356, quare rei æſtimatio, eſt ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: ℞ $27161\frac{13}{27}$ p: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: ℞ $27161\frac{13}{27}$ m: $2\frac{1}{3}$, quare cum partes ſint 2 p: 1 poſitione, & 6 m: 1 poſitione, ipſæ erunt quales uides, $8\frac{1}{3}$ m: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: ℞ $27161\frac{13}{27}$ m: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: ℞ $27161\frac{13}{27}$ ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: ℞ $27161\frac{13}{27}$ p: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: ℞ $27161\frac{13}{27}$ m: $\frac{1}{3}$.

2	p:	1 poſ.
6	m:	1 poſ.

8 p: 6 q̄d. p: 12 poſ. p: 1 cub.
36 p: 1 q̄d. m: 12 poſ.
44 p: 7 q̄d. p: 1 cub.
æqualia 400
1 cub. p: 7 q̄d. æqual. 356

Et ſi dicat de diuiſione numeri aſsignati, in duas partes, quarum differentia cubi unius à quadrato alterius, ſit numero dato æqualis, tunc ſemper pones $\frac{1}{3}$ p: 1 poſitione, pro parte quæ cubari debet, & reſiduum numeri diuidendi, detracto $\frac{1}{3}$ m: 1 poſitione, pro numero in

ſe

ſe ducendo, inde facta detractione, habebis cubum & res æquales numero, quare erit cognita utraq; pars confeſtim.

Qvæstio IIII.

Exemplum, Diuide 8 in duas partes, quarum cubus unius, excedat quadratum alterius, in 10. Ponemus itaq; partem primam $\frac{1}{3}$, & ſecundam $7\frac{2}{3}$, & addemus ad $\frac{1}{3}$, rem, & fiet $\frac{1}{3}$ p: 1 poſitione, & minuemus rem ex $7\frac{2}{3}$, & fiet $7\frac{2}{3}$ m: re, inde ſequemur operationem, & habebimus pro cubo, $\frac{1}{3}$ p: 1 poſitione, hoc, 1 cubo p: 1 quadrato p: $\frac{1}{3}$ poſitionis p: $\frac{1}{27}$, & pro quadrato, 1 quad. m: $15\frac{1}{3}$ poſitionibus p: $58\frac{7}{9}$, horum differentia erit 1 cubus p: $15\frac{2}{3}$ poſitionibꝰ m: $58\frac{20}{27}$ & hoc æquatur 10, igitur cubus & $15\frac{2}{3}$ poſitiones, æquatur $68\frac{20}{27}$, & rei æſtimatio cognita eſt, cui addemus $\frac{1}{3}$ pro prima parte, & minuemus eam à $7\frac{2}{3}$, pro ſecunda parte, & ſi uoluiſſemus, quod quadratum ſuperaſſet cubum, detraxiſſemus 10 numerum æquationis, ex $58\frac{20}{27}$, & haberemus 1 cubū p: $15\frac{2}{3}$ poſitionibus, ęqualem $48\frac{20}{27}$, & modi huius primę regulę ſunt innumerabiles, & ſunt quaſi pars regulæ de modo.

$\frac{1}{3}$	p:	1 poſ.
$7\frac{2}{3}$	m:	1 poſ.
$\frac{1}{27}$ p: $\frac{1}{3}$ poſ.	p: 1 q̃d.	p: 1 cu:
$58\frac{7}{9}$	m: $15\frac{1}{3}$ poſ.	p: 1 q̃d.
$58\frac{20}{27}$	$15\frac{2}{3}$ poſ.	p: 1 cub.

Regvla II.

Verum alia regula quæ multum apud nos in uſu eſt, & facilior, talis eſt, & etiam exemplis ut reliquæ facilius explicabitur.

Qvæstio V.

Fac igitur ex 8 duas partes, quarum aſſumptis quadratis ſimul, item cubis ſimul, ductoq; uno aggregato per alterum, fiat numerus perfectus, poſſem dicere, quod faceret etiam numerum terminatum, ut 10000, uel alium, datur etiam maximus quem poteſt producere, & eſt 32768, & producitur ex cubo totius, in quadratum totius, datur etiam minimus quo minorem producere non poteſt, & eſt 4096. Videndum eſt igitur primo, an inter hos duos numeros, cadat numerus perfectus, & eſt 8128, qui ſi non caderet, eſſet quæſtio impoſsibilis, pone igitur unam partem 4 m: 1 poſitione, aliam 4 p: 1 poſitione, & fient quadrata, 16 p: 8 poſitionibus p: 1 quadrato, & 16 m: 8 poſitionibus p: 1 quadrato, quę iuncta erunt 32 p: 2 quadratis, excidentibus rebus, cubi etiam erunt, 64 p: 12 quadratis p: 48 poſitionibus p: 1 cubo, & 64 p: 12 q̃dratis m: 48 poſitionibus m: 1 cubo, qui iuncti, ſunt 128 p: 24 quadratis, quare ducemus 32 p: 2 quadratis, in 128 p: 24 quadratis, & fient 4096 p: 1024 quadratis p: 48 q̃d'q̃dratis, & hæc ſunt æqualia 8128, igitur habebimus, facta detractione & diuiſione,

1 q̃d'q̃d^m

1 q̄d q̄dratum p:21 $\frac{1}{3}$ q̄dratis, æqualia 84, quare res eſt ℞ v: ℞ 197 $\frac{7}{9}$ m: 10 $\frac{2}{3}$, partes igitur ſunt 4 p: dicta radice & 4 m: dicta radice.

Qvæstio VI.

Fac de 10 duas partes, quarum radices quadratæ cubicatæ faciãt 26, pone quod tales ℞ ſint 1 poſitio, fac ex 1 poſitione duas partes, quarum quadrata iuncta ſint 10, eo quòd radices talium partium debent aggregare 1 poſitionem, ex regulis igitur ſexti libri, uel ex Euclide, habebis partes, ut uides, id eſt, $\frac{1}{2}$ poſitionem p: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ poſitionis m: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, iſtæ reducendæ ſunt ad cubum, & quia in cubando Binomium, oportet ducere

$\frac{1}{2}$ poſ. p: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ q̄d.
$\frac{1}{2}$ poſ. m: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ q̄d.

quamlibet partium in ſe, & triplare, & addere quadrato alterius partis, & productum ducere in illam alteram partem, ideo cum talia producta aſsimilentur, & ſint æqualia, & unum ſit p: aliud m: quando duceremus triplum quadrati primæ partis cum quadrato ſecundæ in ſecundam, ideo ſufficiet ducere, triplum quadrati ſecundæ partis, quod eſt 15 m: $\frac{3}{4}$ quadrati cum quadrato primæ partis, quod eſt $\frac{1}{4}$ quadrati, & fiet totum 15 m: $\frac{1}{2}$ quadrati, in primam partem quę eſt $\frac{1}{2}$ poſitio. ſed quia hæc operatio geminanda eſt, propter duas partes, habebimus multiplicationem 15 m: $\frac{1}{2}$ quadrati, in 1 poſitionem, quæ eſt duplum $\frac{1}{2}$ poſitionis primæ partis, igitur tandem producentur 15 poſitiones m: $\frac{1}{2}$ cubi, æqualis 26, quare 1 cubus p: 52, æquabitur 30 poſitionibus, & rei æſtimatio erit ex capitulo ſuo, ℞ 27 m: 1, inde habebis partes, ut uides, & in uerificatione operationis, multo magis hacregula indiges ad facilitatem, uerum de hoc diximus in tertio libro ſuo loco.

℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: ℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: 2
℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: ℞ 6 $\frac{3}{4}$ m: 2

Qvæstio VII.

Et ad hanc reducitur quæſtio illa, quidam emit Croci lib. 1. Cinamoni lib. 2. Piperis lib. 5, precijs proportionalibus, ſic, ut ſe habuit precium totius piperis, ad precium cinamomi, ſic precium cinamomi, ad precium croci, ita quòd precium croci fuit minimum, & piperis maximum, & cinamomi medium, & hæc tria precia, iuncta ſimul, fuerunt 6 aurei. Denuo ſub eiſdem precijs emit croci lib. 30, cinamomi lib. 50, piperis lib. 40, aureis 100, quæritur ſingulorum precia. Hæc quęſtio, à fratre Luca poſita eſt, ſed in numeris ꝓportionalibus, nam ſic exiſtimat eam admodum difficilem, ſed non eſt, nam cum precia hæc, 5 librarum piperis, & 2 cinamomi, & 1 croci ſint proportionalia, ipſa manebunt etiam proportionalia, in ſuis aggregatis, diuidemus

mus igitur 30 lib. croci per 1, & eſt ſecunda quantitas per primam, & ita 50 cinamomi per 2, & 40 piperis per 5, & ex ibunt numeri in margine, id

Crocus	Cinamomũ	Piper	Aurei
30	50	40	100
1	2	5	6
30	25	8	100

eſt 30, pro croco, 25 pro cinamomo, & 8 pro pipere, manifeſtum eſt igitur quod hi ſunt numeri trium quantitatum ꝓportionalium, quæ ſunt precia 1 lib. croci, 2 cinamomi, & 5 piperis, & quod prima quan titas ſeu precium, ſumptum 30 uicibus, & ſecundum 25 uicibus, & ter tium 8 uicibus, faciunt 100 aureos, at uero iſtæ quantitates, ut dictũ eſt, ſunt 6 aurei, ſimpliciter ſumptæ, fac igitur ex 6 tres quantitates proportionales, quarum prima ducta per 30, ſecunda per 25, tertia per 8, faciant 100. Ponemus igitur, mediam 2 poſitiones, relinquentur reliquæ, 3 m: 1 poſitione p: ℞ v: 9 m: 3 quadratis m: 6 poſitionibus, & 3 m: 1 poſitione m: ℞ v: 9 m: 3 quadratis m: 6 poſitionibus, ducendæ igitur ſunt ſingulæ per ſuos numeros, quia igitur primę partes Binomiorum ſunt æquales, & ambæ p: tantum erit ducere eas per 30, & per 8, quantum per 38, & ſimiliter, quia radicũ uniuerſalium una eſt m: ducenda per 30, alia p: ducenda per 8, tantum erit, cum ſint æquales; quantum, ſi ducant̃ per 22, differentiam 30 & 8, & producentur partes,

3 m: 1 poſ. p: ℞ v: 9 m: 3 q̃d. m: 6 poſ.
8

3 m: 1 poſ. m: ℞ v: 9 m: 3 q̃d. m: 6 poſ.
30

2 poſ. ——— 25 ——— 50 poſ.

p: 3 m: 1 poſ. | m: ℞ v: 9 m: 3 q̃d m: 6 poſ.
38 | 22

114 m: 38 poſ. | m: ℞ v: 4356 m: ℞ 1452 quad. m: 2904 poſ.

114 m: 38 poſ.
50 poſ.
m: ℞ v: 4356 m: 1452 q̃d. m: 2904 poſ. æqualia 100

quas uides à latere, & ipſæ erunt æquales 100, iunge & detrahe ſimilia, habebis 14 p: 12 poſitionibus, æqualia ℞ v: illi, quæ eſt m: & ideo quadratum quadrato, id eſt 196 p: 336 poſitionibus p: 144 quadratis, æqualia 4356 m: 1452 quadratis m: 2904 poſitionibus, æq̃lia partes, habebis 4160 æqualia 1596 quadratis p: 3240 poſitionibus, quare 1 q̃d. p: 2 $\frac{4}{133}$, æq̃tur 2 $\frac{242}{399}$, eſt igit̃ rei æſtimatio ℞ 3 $\frac{4494602}{7057911}$ m: 1 $\frac{2}{133}$, precium igitur unius libræ croci, eſt aurei 4 $\frac{2}{133}$ m: ℞ 3 $\frac{4494602}{7057911}$, & precium duarũ librarum cinamomi, eſt ℞ 14 $\frac{3862586}{7057911}$ m: 2 $\frac{4}{133}$, & precium quinq; librarũ piperis, eſt ℞ 3 $\frac{4494602}{7057911}$ p: 1 $\frac{131}{133}$,

S ſi igitur

ſi igitur diuiſeris hæc precia proportionalia, per ſuarum librarum numerum, referendo ſingula ſingulis, primum per 1, ſecundum per 2, tertium per 5, habebis precia librarum ſingularum, uniuſcuiuſq; generis, & ſi duxeris ea per duos numeros, in ſecunda emptione, precium croci per 30, cinamomi per 50, piperis per 40, habebis quãtum pecuniarum ſingulis impenderit.

QVÆSTIO VIII.

Eodem modo ſoluitur quæſtio hæc, fac ex 14 tres partes proportionales, quarum maior ducta per 2, media per 3, minor per 4, producta hæc iuncta, faciant 36, peruenies enim per modum ſuperioris, ad 1 q̄dratum p: $9\frac{1}{3}$ poſitionibus, æqualia $53\frac{1}{3}$, quare res eſt ℞ $75\frac{1}{9}$ m: $4\frac{2}{3}$, & eſt 4, media quantitas, poſita media quantitate 1 poſitione, non ut in priore, 2 poſitionibus.

QVÆSTIO IX.

Diuide 14 in tres partes proportionales, ut ducta prima per 2, ſecunda per 3, talia producta æquẽtur tertiæ multiplicatæ per 7. Pones ſecundam, eſſe 2 poſitiones, reliquæ erunt ut uides, ducta ſecunda per 3, fiunt 6 poſitiones, modo prima habet multiplicari ꝑ 2, & tertia per 7, & habent detrahi, igitur cum ambæ partes ſint ſimiles, & prima in ambabus ſit p: & ſecunda in prima ſit p: in tertia m: ideo primam partem ſufficit multiplicare ꝑ differentiam 7 & 2, quæ eſt 5, & producentur pro tertia parte, 35 m: 5 poſitionibus, quibus demptis 6 poſitionibus producto ſecundæ partis, habebimus 35 m: 11 poſitionibus, pro differentia tertij & ſecundi producti, primum autem producetur, ducto 9 aggregato primi & tertij, in radicem uniuerſalem, & fit ℞ v: 3969 m: 1134 poſitionibus m: 243 quadratis, hæc igitur æquatur 35 m: 11 poſitionibus, quare quadratum quadrato, igitur 1225 m: 770 poſitionibus p: 121 quadratis, æquantur 3969 m: 1134 poſitionibus m: 243 quadratis, æqua partes, habebis 2744 æqualia 364 poſitionibus p: 364 quadratis, quare 1 q̃d. p: una poſitione æquantur $7\frac{7}{13}$, quare rei æſtimatio eſt cognita, et eius duplum eſt pars ſecunda, ſcilicet ℞ $31\frac{2}{3}$ m: 1.

2ª	2 poſ.
pª	7 m: 1 poſ. p: ℞ v: 49 m: 14 poſ. m: 3 q̃d.
3ª	7 m: 1 poſ. m: ℞ v: 49 m: 14 poſ. m: 3 q̃d.

QVÆSTIO X.

Fac de 8 tres partes proportionales, ut aggregatum quadratorũ primæ & ſecundæ, triplum ſit quadrato ſecundæ, pones quantitatem mediam 2 poſitiones, eius quadratum eſt 4 quadrata, cuius triplum eſt aggregatum quadratorum primæ & tertiæ, eſt autem prima 4 m:

1 poſi-

1 poſitione p:℞ v: 16 m:8 poſitionibus m:3 quadratis,& tertia eſt 4 m:1 poſitione m:℞ v: 16 m:8 poſitionibus m:3 quadratis,deducendo igitur hæc ad quadrata,uides quod oportet multiplicare ℞ v: in ſe ſemel, & partē primā in ſe ſemel, & omnia ſunt p: quare ſufficiet talia producta duplicare,deinde oporteret ducere ℞ v: in primā partem bis,quare cum in una ꝓducatur p: in alia m: ſuppoſitis, partibus æqualibus,nihil producet,igitur habebimus aggregatum quadratorum 64 m:32 poſitionibus m:4 q̄dratis,& hoc eſt ęquale 12 quadratis,triplo quadrati ſecundæ,igitur 1 q̄dratum p:2 poſitionibus ęquatur 4,& res eſt ℞ 5 m:1,& duplum eius,eſt quantitas media ſcilicet ℞ 20 m:2,& reliquæ,ut uides, quadratum ſecundæ eſt 24 m:℞ 320, quadrata autem primæ & tertiæ, 72 m: ℞ 2880 probata eſt.

4 m:1 poſ.	p:℞ v:16 m:8 poſ.m:3 q̄d.
4 m:1 poſ.	p:℞ v:16 m:8 poſ.m:3 q̄d.
4 m:1 poſ.	m:℞ v:16 m:8 poſ.m:3 q̄d.
4 m:1 poſ.	m:℞ v:16 m:8 poſ.m:3 q̄d.
32 m:16 poſ.p:2 q̄d.	p:32 m:16 poſ.m:6 q̄d.

p^a 5	m:℞ 5	p:℞ v:6	m:℞ 20
3^a 5	m:℞ 5	m:℞ v:6	m:℞ 20

Sed ſi diceret, quod quadrata primæ & tertiæ, tripla eſſent quadratis ſecundæ & tertiæ,tunc difficulter per hanc regulam ſoluitur,uerum facilius longe,per primam regulam 39^i capituli,ponendo quantitates 1,1 poſitio,& 1 quadratum, habebis 1 q̄d' q̄dratum p:triplum de 1 quadrato p:1,quare res nota eſt.

Qvæstio xi.

Si dicas, fac ex 8 duas partes, quæ uiciſsim diuiſæ per alterius quadratum,producant iuncta prouenientia 10, pones partes 4 p:1 poſitione & 4 m:1 poſitione,& per hanc regulam,peruenies ad capitulum deriuatiuum,q̄d' q̄drati & q̄drati & numeri,& eſt facilis.

Qvæstio xii.

Inuenias quatuor numeros continue proportionales,quorum aggregatum,primi ſecundi & quarti,ſit 15,& aggregatum primi & tertij & quarti ſit 17,tunc dices,igitur cum hęc aggregata differant,per differentiam ſecundæ & tertiæ,igitur tertia eſt 2 p: quàm ſecunda,ponam igitur ſecundam,1 poſitionem m:1,& tertiam 1 poſitionem p:1 nam ſic differentia illarum erit 2,relinquetur igitur aggregatum primæ & quartæ 16 m: 1 poſitione, duc ſecundam in tertiam,ſit 1 q̄d. m:1,fac ex 16 m:1 poſitione duas partes,ex quarum multiplicatione inuicem,producantur 1 quadratū m:1,& erunt partes ut uides, quia

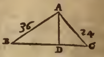
igitur ꝓportio quartæ ad tertiam, eſt ut ſecundæ ad primam, ex conſtituo, quia ꝓductum ſecundæ in tertiã, æquale eſt pro

8 m: $\frac{1}{2}$ poſ. p: ℞ v: 65 m: 8 poſ. m: $\frac{3}{4}$ q̄d.	4ª
8 m: $\frac{1}{2}$ poſ. m: ℞ v: 65 m: 8 poſ. m: $\frac{3}{4}$ q̄d.	pª
1 poſ. p: 1	3ª
1 poſ. m: 1	2ª
2 cub. p: 6 poſ.	

ducto primæ in quartam, ſufficiet ad demonſtrandum, quòd ſint continue proportionales, quod cubi ſecundæ & tertiæ iuncti æquales ſint, productis quantitatum quartæ & primæ, in ſua quadrata mutuo, at tales cubi, fiunt ſolum ex multiplicatione tripli quadrati ſecundæ partis, cum quadrato primæ, in ipſam primam, eo quod reliqua multiplicatio tripli quadrati primæ partis, cum quadrato ſecundæ in ipſam ſecundam, excidit, eo quod in una eſt p: in alia m: igitur habemus cubos iunctos, 2 cub. p: 6 poſitionibus, & tantum debet fieri ex multiplicatione quadratorum primæ & quartæ quantitatis, in ipſas quantitates uiciſsim, hoc aũt ut demonſtratum eſt, æquale eſt ductui unius quantitatis in alteram, multiplicato in aggregatum ipſarum quantitatum, ex dictis in ſexto libro, duc igitur quantitates inuicem, & quia ℞ v: ſunt ſimiles, multiplicatio in crucem nulla erit, quare ſufficiet quadrare utramq; partem, & minuere unam ab altera, quia m: in p: facit m: producentur igitur à partibus ſimilibus 1 q̄d. m: 1, aggregatum etiam radicum eſt 16 m: 1 poſitio, eo quod ℞ v: excidunt, igitur productum erit 16 q̄drata m: 1 cubo p: 1 poſitione m: 16, & hoc æquatur 2 cubis p: 6 poſitionibus, igitur 3 cubi p: 5 poſitionibus p: 16, æquantur 16 quadratis, quare res eſt in capitulo, uides autem quoniam inextricabilis quæſtio ad magnam reducitur facilitatem, & poſſet reduci ad regulam de modo, nam ubi differentia eſt 2, ſemper 3 cubi p: 5 poſitionibus, p: numero medio inter duo aggregata per æquidiſtantiam, ęquantur totidem quadratis, quotus eſt numerus.

QVÆSTIO XIII.

Eſt trigonus A B C orthogonius, & eius perpendicularis ad baſim A D, cuius latus A B, cum B D, eſt 36, & A C cum C D, eſt 24, quæritur area, pone B C 1 poſitionem, erit igitur quadratum B C 1 q̄d. & ideo cum A B & B D, ſint 36, & rurſus A C & C D, 24, erunt omnia latera trigoni 60, quare A B & B C, erunt 60 m: 1 poſitione, oportet igitur ex A B & A C, facere duas partes, quarum quadrata iuncta ſint æqualia quadrato B C, ſecundum doctrinam 47ᵉ primi elemen. Euclidis, quare ex regulis ſexti libri noſtri, diuide 60



de 60 m: 1 poſitione per æqualia, fit 30 m: ½ poſitiones, duc in ſe, fit 900 m: 30 poſitionibus p: ¼ quadrati, detrahe ex dimidio quadrati B C, relinquitur ¼ quadrati p: 30 poſitionibus m: 900, cuius ℞, addita & detracta, à dimidio aggregati A B & A C, oſtendit partes, eſt igitur A B 30 m: ½ poſitionis p: ℞ v: ¼ quadrati p: 30 poſitionibus m: 900, & A C 30 m: ½ poſitionis m: ℞ v: ¼ quadrati p: 30 poſitionibus m: 900, quare ſi detrahatur A B ex aggregato A B & B D, relinquetur B D 6 p: ½ poſitionis m: ℞ v: ¼ quadrati p: 30 poſitionibus m: 900, & ſimiliter, detracta A C, ex aggregato A C & C D, relinquitur C D, ½ poſitionis m: 6 p: ℞ v: ¼ quadrati p: 30 poſitionibus m: 900, eſt autem manifeſtum ex demonſtratione 47ª, primi elementorum Euclid. quod differentia quadrati A B, à quadrato A C, æqualis eſt differentiæ quadrati B D, à quadrato C D, differentia autem duarum quantitatum, eſt ſemper in partibus diſsimilibus, nam quæ ſimiles ſunt, nullam producunt differentiam, quare cum quadrata partium conſtent ex nouem multiplicationibus, quarum tres ſunt quadrata partium, erunt illæ tres omnino ſimiles, comparando A B ad A C, & B D ad C D, & ſimiliter multiplicationes duæ 30 in ½ poſitionis, ſunt communes A B & A C, cum utraq; producant m: & ita in B D & C D, communes ſunt multiplicationes, 6 in ℞ v: nam utrinq; prouenit idem m: differentia igitur A B & A C, ex parte A B, eſt multiplicatio 30 in ℞ v: & ex parte A C, multiplicatio ½ poſitionis in ℞ v: quare differentia quadratorum A B, & A C, eſt illud quorum ℞ v: 225 quadratorũ p: 27000 poſitionibus m: 810000, excedit ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d q̄drati p: 7 ½ cubis m: 225 quadratis, eadem eſt ratione differentia B D & C D quadratorum, eſt qua 3 poſitiones excedunt ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d q̄drati p: 7 ½ cubis m: 225 quadratis, oportuiſſet aũt com-

A B 30 m: ½ poſ. p: ℞ v: ¼ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
A C 30 m: ½ poſ. m: ℞ v: ¼ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
B D ½ poſ. p: 6 m: ℞ v: ¼ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
C D ½ poſ. m: 6 p: ℞ v: ¼ q̄d. p: 30 poſ. m: 900

pars q̄d. A B diſsim. ℞ v: 225 q̄d. p: 27000 poſ. m: 810000
pars q̄d. A C diſsim. ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d q̄d. p: 7 ½ cub. m: 225 q̄d.
pars q̄d. B D 3 poſ.
pars q̄d. C D ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d q̄d. p: 7 ½ cub. m: 225 q̄d.

plendo operationem, omnia quadruplicare, ſed hoc uitauimus, quia ſi q̄druplum eſt æquale q̄druplo, igitur & ſimplum ſimplo, hæc igitur differentiæ ęquales ſupponuntur, & radices v: etiam ſunt idẽ, igi-

igitur ex cõmuni ſententia, 3 poſitiones æquantur illi ℞ v: primæ, id eſt, ℞ v: 225 quadratorum p: 27000 poſitionibus m: 810000, igitur 216 quadrata p: 27000 poſitionibus æquantur 810000, & 1 q̄d. p: 125 poſitionibus, æquabit̄ 3750, & res erit ℞ 7656 $\frac{1}{4}$ m: 62 $\frac{1}{2}$, quod eſt 25, & tanta fuit B C, unde habes alias.

Quæstio XIIII.

Rurſus diſponatur trigonus A B C, orthogonius, cum perpendiculari A D, & ſint A B cum C D 29, & A C cum B D 31, quęritur area, ponemus B C poſitionem, & erunt rurſus A B & A C eadem, ut in ſuperiore quæſtione, ſed caue, ne maius latus ponas ex parte maioris numeri, ut in priori, detrahe igitur A B ex 29, & A C, ex 31, & habebis quantitates, ut uides, differentia igitur quadratorum A B & A C, æqualis eſt differentiæ quadratorum B D & C D, eſt autem differentia quadratorum A B & A C, ut prius, at differentia quadratorum B D & C D, eſt ut uides, ſumpta eodem modo ut in priori quæſtione, ſed eſt ſuperatio abſoluta, non autem mutua, ut in priori quæſtione, quia igitur quadratum A B, excedit quadratum A C in differentia quadrati B D, ad quadratum C D, erit differentia quadratorum B D & C D, addita quadrato A C conſtituens quadratum A B, quare ℞ v: 225 quadratorum p: 27000 poſitionibus m: 810000, æquabitur $\frac{1}{2}$ poſitionis p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d' q̄drati p: 30 cubis m: 900 quadratis, nam hæc ℞ v: eſt aggregatū ex ℞ v: differentiæ q̄dratorum B D & C D, & partis quadrati A C, in qua ſuperat quadratum A B, quare ducendo partes in ſe, habebimus 675 $\frac{1}{4}$ quadrata p: 27000 poſitionibus m: $\frac{1}{4}$ q̄d' q̄drati m: 30 cubis m: 810000, æqualia ℞ v: 225 q̄d' q̄dratorum p: 27000 cubis m: 810000 quadratis, & cum duxeris partes in ſe, peruenies ad rem, quę non ha-

A B 30 m: $\frac{1}{2}$ poſ. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
A C 30 m: $\frac{1}{2}$ poſ. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
B D $\frac{1}{2}$ poſ. p: 1 p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
C D $\frac{1}{2}$ poſ. m: 1 m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900

pars q̄d. A B diſsim. ℞ v: 225 q̄d. p: 27000 poſ. m: 810000
pars q̄d. A C diſsim. ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' q̄d. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̄d.
pars q̄d. B D qua ſuperat quadratum C D eſt $\frac{1}{2}$ poſ. p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' q̄d. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̄d.

bent æſtimationem, & ideo ſoluenda eſt regula particulari. Volui tamen, ut intelligeres facilitatem operandi in hoc, & quæſtionem ualde difficilem, niſi Geometrico auxilio diſſoluatur, manifeſtum eſt enim

quòd

quòd B C eſt 25,ut in priore quæſtione,uerum generalis debet eſſe ſolutio,latera igitur trigoni B C 25, A B 20, A C 15, A D 12, B D 16, C D 9, area igitur eius eſt 150.

De regula qua pluribus poſitionibus inuenimus ignotam quantitatem. Caput XXXIX.

Regvla I.

HÆc regula ſimilis eſt regulæ de medio,eſt autem talis,Cõſtitue quantitates totidem in denominationibus liberis, quotus eſt numerus quęrendarum,inde inuenies proportionem,qua inuenta,denuo pones res ſub numero quantitatum inuentarũ,utcp propoſitum eſt,perfice operationem,& habebis æquationem,qua habita,habebis rei æſtimationem.

Qvæstio I.

Exemplum.Inuenias tres numeros proportionales,quorum quadratum primi ſit æquale ſecundo & tertio, & quadratum tertij ſit æquale quadratis primi & ſecundi,quia igitur quadratum tertij æquale eſt quadratis ſecundi & primi,ipſum ſit 1 q̄d'q̄dratum,æquale 1 q̄drato p: 1,quare res,ſeu proportio,eſt ℞ v ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$,igitur ponemus res 1,& ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$,& ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$,quadratum igitur primæ quantitatis,quod eſt 1 quadratum,æquatur ſecundæ & tertiæ,ſcilicet totidem rebus,igitur rei æſtimatio, eſt aggregatum ex ſecunda & tertia,quia diuidere aliquid per unitatem,qui eſt numerus quadratorum, eſt non diuidere, igitur rei æſtimatio eſt, ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & ſecunda quantitas,eſt quod producitur ex hac, in ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia habebitur, ducendo rem quam habes in ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{2}{2}$.

1	1 poſ.	1 q̄d.
1	1 q̄d.	1 q̄d q̄d.

Qvæstio II.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum tertius ſit æqualis ſecũdo & primo,& quadratũ primi,ſit æquale aggregato ſecundi & tertij,pones primum quadratũ, ſecundum rem, tertium unitatem, & quia tertius,æqualis eſt ſecundo & primo,igitur 1 quadratum, æquatur 1 rei p: 1,& proportio erit ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$,partes igitur erunt, 1 poſitio,& poſitiones ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & poſitiones 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$, & quia quadratũ primi æquale eſt aggregato ſecundi & tertij,igitur 1 quadratum æquatur poſitionibus ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ p: 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$,quare rei æſtimatio erit ℞ 5 p: 2,& partes ut uides.

℞ 5	p:	2
	3 $\frac{1}{2}$ p:	℞ 11 $\frac{1}{4}$
℞ 31 $\frac{1}{4}$	p:	5 $\frac{1}{2}$

QVÆSTIO III.

Inuenias quatuor quantitates proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale ſit quadratis primæ, & ſecundæ, & quantitates iunctæ ſimul, faciant 10, capiam 1, rem, quadratum & cubum, igitur q̄d'cubus, ęquatur 1 quadrato p: 1, quare res ualet ex capitulo deriuatiuorū, ℞ v^m^a: ℞ v: cubicæ $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{23}{108}$ p: ℞ v: cubica $\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{23}{108}$, igitur poſita prima unitate, hæc eſt ſecunda quantitas, & tertia erit quadratum huius, ſcilicet ℞ v cubica $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{23}{108}$ p: ℞ v: cubica $\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{23}{108}$, quarta erit cubus ſecundæ ſeu proportiōis, inde iunctis quatuor quantitatibus ſcilicet unitate, re, quadrato, & cubo, & diuiſo 10 per aggregatum, exibit prima quantitas, qua ducta in rem habebimus ſecundam, hac denuo, ducta in rem, habebimus tertiam, qua ducta per rem, habebimus quartam.

1	1 poſ.	1 q̄d.	1 cub.	
1	1 q̄d.	—	1 cub'q̄d.	

QVÆSTIO IIII.

Inuenias quatuor quantitates continue proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale ſit quadratis primæ & tertiæ, & aggregatum earum ſit 10, capiam ut in præcedente 1, rem, quadratum, cubū, erit igitur cu'q̄dratum æqualis q̄d'q̄drato p: 1, quare ex capitulo deriuatiuorū, rei æſtimatio eſt ℞ v^m^a: ℞ v: cubicæ $\frac{29}{54}$ p: ℞ $\frac{31}{108}$ p: $\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica $\frac{29}{54}$ m: ℞ $\frac{31}{108}$, & huius q̄dratū, quod eſt idem, abiecta ℞ v^m^a: eſt tertia quantitas, inde ductis inuicem ſecunda & tertia, uel ſecunda ad ſuum cubum, uel tertia ad quadratum, & addita unitate conſurgit quarta, quibus quatuor quantitatibus iunctis, ſi per eas diuiſeris 10, habebis primam quæſitarum, qua ducta per ſecundam, & tertiam, & quartam, præcedentium, habebis ſecundam & tertiam & quartam quantitatem quas quęrebas.

REGVLA II.

2 Alia eſt regula nobilior præcedente, & eſt Ludouici de Ferrarijs, qui eam me rogante inuenit, & per eam habemus omnes ęſtimationes fermè capitulorum q̄d' q̄drati & quadrati rerum, & numeri, uel q̄d' quadrati cubi, quadrati & numeri, & ego ponam ea per ordinem, hoc modò ut uides.

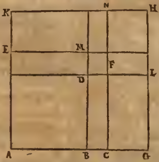
1 q̄d'q̄d. æquale q̄d. rebus & numero
2 q̄d'q̄d. æquale q̄d. cubis & numero
3 q̄d'q̄d. æquale cubis & numero
4 q̄d'q̄d. æquale rebus & numero
5 q̄d'q̄d. cum cubis æqualia q̄d. & numero
6 q̄d'q̄d. cum rebus æqualia q̄d. & numero

7 q̄d'q̄d. cum cubis æqualia numero
8 q̄d'q̄d. cum rebus æqualia numero
9 q̄d'q̄d. cum q̄d. æqualia cub. & numero
10 q̄d'q̄d. cum q̄d. æqualia rebus & numero
11 q̄d'q̄d. cum q̄d. & rebus æqualia numero
12 q̄d'q̄d. cum q̄d. & cubis æqualia numero
13 q̄d'q̄d. cum q̄d. & numero æqualia cubis
14 q̄d'q̄d. cum q̄d. & numero æqualia rebus
15 q̄d'q̄d. cum numero æqualia cubis & q̄d.
16 q̄d'q̄d. cum numero æqualia cubis
17 q̄d'q̄d. cum numero æqualia rebus & q̄d.
18 q̄d'q̄d. cum numero æqualia rebus
19 q̄d'q̄d. cum cubis & numero æqualia q̄d.
20 q̄d'q̄d. cum rebus & numero æqualia q̄d.

In his igitur omnibus capitulis, quę quidem ſunt generaliſsima, ut reliqua omnia ſexaginta ſeptem ſuperiora, oportet reducere capitula, in quibus ingreditur cubus, ad capitula, in quibus ingreditur res ut ſeptimum ad quartum, & ſecundum ad primum, deinde quæremus demonſtrationem hoc modo.

Demonstratio.

Sit quadratum A F, diuiſum in duo quadrata A D & D F, & duo ſupplementa D C & D E, & uelim addere gnomonem K F G circũcirca, ut remaneat quadratum totum A H, dico quòd talis gnomo, conſtabit ex duplo G C additæ lineæ, in C A, cum quadrato G C, nam F G conſtat ex G C in C F, ex diffinitione data in initio ſecundi elementorum, et C F eſt æqualis C A, ex diffinitione quadrati, & per 44^am primi elementorum, K F eſt æqualis F G, igitur duæ ſuperficies G F & F K, conſtant ex G C, in duplum C A, & quadratũ G C eſt F H, ex corrolario quartæ ſecundi elementorũ, igitur patet propoſitum, ſi igitur A D ſit 1 q̄d'q̄d^m & C D ac D E, 3 quadrata, & D F 9, erunt B A 1 quadratum, & B C 3 neceſſario, cum igitur uoluerimus addere q̄drata aliqua, ad D C & D E, & fuerint C L & K M, erit ad cõplendum quadratum totum neceſſaria ſuperficies L N M, quæ ut demonſtratum eſt, conſtat ex quadrato G C numeri quadratorum dimidiati, 3



nam C L eſt ſuperficies ex G C in A B, ut oſtenſum eſt, & A B eſt 1 q̃dratum, quia ponimus, A D 1 q̃d'q̃dratum, F L uero & M N, fiunt ex G C in C B, ex 42ª primi elementorum, quare ſuperficies L N M, & eſt numerus addendus, fit ex G C in duplum C B, id eſt in numerum quadratorum, qui fuit 6, & G C in ſeipſam, id eſt numero quadratorum addito, & hæc demonſtratio noſtra eſt.

4 Hoc peracto, ſemper reduces partem q̃d'q̃drati ad ℞, id eſt addendo tantum utrique parti, ut 1 q̃d'q̃dratum cũ quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile eſt, cum poſueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies, ut denominationes extremæ ſint plus, in ambabus æquationibus, nam ſecus, trinomium ſeu Binomium redactum ad trinomium, neceſſario careret radice.

5 Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res faciat trinomium habens ℞ quadratam per poſitionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utrique parti, quo habito, ab utroque extrahes ℞ quadratam, quæ erit in una, 1 quadratum p: numero, uel m: numero, ex alia, 1 poſitio uel plures p: numero, uel m: numero, uel numerus m: poſitionibus, quare per quintum capitulum huius, habens propoſitum.

QVÆSTIO V.

Exemplum. Fac ex 10 tres partes proportionales, ex quarum ductu primæ in ſecundam, producantur 6. Hanc proponebat Ioannes Colla, & dicebat ſolui non poſſe, ego uero dicebam, eam poſſe ſolui, modum tamẽ ignorabam, donec Ferrarius eum inuenit. Pones igitur mediam 1 poſitionem prima erit $\frac{6}{1\ \text{poſ.}}$ & tertia erit $\frac{1}{6}$ cubi, quare hæc æquantur 10, ducendo omnia in 6 poſitiones, habebimus 60 poſitiones, æquales 1 q̃d'q̃drato p: 6 quadratis p: 36, adde ex quinta regula, 6 quadrata utrique parti, habebis 1 q̃d'q̃dratum p: 12 quadratis p: 36, æqualia 6 quadratis p: 60 poſitionibus, nam ſi æqualibus æqualia addatur, tota fient æqualia, habent autem 1 q̃d'q̃dratum p: 12 quadratis p: 36, radicem & eſt, 1 quadratũ p: 6, quã ſi haberent 6 quadrata p: 60 poſitionib⁹ iam

1 q̃d'q̃d. p: 6 q̃d. p: 36	æqualia 60 poſ.
6 q̃d.	6 q̃d.
1 q̃d'q̃d. p: 12 q̃d. p: 36 æq̃lia	6 q̃d. p: 60 poſ.
2 poſ.	1 q̃d. p: 12 poſ.

haberemus negocium, ſed non habent, addendi igitur ſunt tot quadrati & numerus idem ex utraque parte, ut in priore relinquatur trinomium habens radicem, in altero autem fiat, ſit igitur numerus quadra

torum

torum 1 poſitio,& quia,ut uides in figura tertiæ regulæ, C L & M K, fiunt ex duplo G C in A B,& G C eſt 1 poſitio, ponam numerum quadratorum addendorum ſemper 2 poſitiones,id eſt duplũ G C,& quia numerus addendus ad 36, eſt L N M, & ideo quadratum G C cum eo quod fit ex G C duplicato in C B,ſeu ex G C in duplum C B,& eſt 12,numerus quadratorum priorum,ducam igitur 1 poſitionem,dimidium numeri q̄dratorum additorũ,ſemper in numerum q̄dratorũ priorũ, & in ſe,& fient 1 q̄dratum p: 12 poſitionibus addenda ex alia parte, & etiam 2 poſitiones pro numero quadratorum, habemus igitur iterum ex communi animi ſententia, quantitates infraſcriptas, inuicem æquales,& utraꝗ habent radicem,prima ex regula tertia, ſed ſecunda quantitas ex ſuppoſito,igitur ducta prima parte trinomij in tertiam,fit quadratum dimidiæ partis ſecundæ

1 q̄d'q̄d.p:2 poſ.p:12. q̄d* p:1 q̄d.p:12 poſ. additi numeri p:36 æqualia.
2 poſ.6 q̄dratorũ,p:60 poſ.p:1 q̄d. p:12 poſ. numeri additi.

trinomij,quia igitur ex dimidio ſecundæ in ſe,fiunt 900,quadrata,& ex prima in tertiam, fiunt 2 cubi p: 30 quadratis p: 72 poſitionibus quadratorum,ſimiliter erit deprimendo per quadrata, quia æqualia per æqualia diuiſa,producunt æqualia,ut 2 cu. p:30 quadratis p: 72 poſitionibus æquantur 900,quare 1 cubus p:15 quadratis p:36 poſitionibus æquantur 450.

Sufficit igitur deducendo ad regulam,habere ſemper 1 cubum p: numero priorum quadratorum,addita ei quarta parte p:numero poſitionum tali,qualis eſt numerus ęquationis primus,ut ſi habuerimus 1 q̄d'q̄dratum p:12 quadratis p:36, æqualia 6 quadratis p:60 poſitionibus,habebimus 1 cubum p:15 quadratis p: 36 poſitionibus æqualia 450,dimidio quadrati dimidij numeri poſitionum, & ſi haberemus 1 q̄d'q̄dratum p:16 quadratis p:64 æqualia 80 poſitionibus, haberemus 1 cubum p:20 quadratis p:64 poſitionibus æqualia 800, & ſi haberemus 1 q̄d'q̄dratum p:20 quadratis p:100,æqualia 80 poſitionibus,haberemus 1 cubum p:25 quadratis p: 100 poſitionibus æqualia 800,igitur hoc habito,in priore exemplo habuimus, 1 cub. p:15 quadratis p:36 poſitionibus æqualia 450, igitur rei æſtimatio, per 17^m capitulum,eſt R̸ v:cubica $287\frac{1}{2}$ p: R̸ $80449\frac{1}{4}$, p:R̸ v:cubica $287\frac{1}{2}$, m:R̸ $80449\frac{1}{4}$ m:5, hic igitur eſt numerus quadratorũ,qui duplicatus, eſt addendus ex utraꝗ parte,quia ſupponuntur 2 res addendæ,& numerus addendus ex utraꝗ parte,ex demonſtratione, eſt quadratum huius,cum eo quod fit ex hoc in 12,numerum quadrato-

rum,manifeſtum eſt autem,quod ℞ quadrata primi aggregati, ſemper eſt 1 quadratum p:dimidio numeri quadratorum,abſq; alio, id eſt p:℞ v:cubica 287 $\frac{1}{2}$ p:℞ 80449 $\frac{1}{4}$ p:℞ v:cub. 287 $\frac{1}{2}$ m:℞ 80449 $\frac{1}{4}$ p:1,& hoc quia dimidium prioris numeri quadratorum fuit 6, & in addito trinomio fuit m:5,igitur totum fuit,ut dixi,uerũ reliqua pars, fuit quadrata 6 p:duplo huius numeri,igitur fuit numerus quadratorum ℞ v: cubica 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148752 m:4,& numerus rerum ex ſuppoſito fuit 60, & numerus eſt (ut oſtenſum eſt) quadratum dictæ quantitatis, plus duodecuplo ipſius quantitatis,uerum quia ex ſuppoſito,ex numero quadratorum in numerum æquationis fit quadratum dimidij numeri rerum, igitur diuiſo 900 quadrato dimidij numeri rerum,per numerum quadratorum,exibit numerus,quantitates igitur ſunt hæ, ut uides, & quia latus A G eſt compoſitũ ex lateribus duorum quadratorũ A D & D H di-

quadrata ℞ v:cubica 2300 p:℞ 5148752 p:℞ v:cubica 2300 m:℞ 5148752 m:4
res 60
900
numerus ℞ v:cubica 2300 p:℞ 5148752 p:℞ v:cubica 2300 m:℞ 5148752 m:4

miſsis ſupplementis, erunt ℞ primæ & tertiæ harum quantitatum iunctæ inuicem,℞ v:totius aggregati,quare ℞ primæ & tertiæ quantatis,æquantur 1 quadrato p:℞ v:cubica 287 $\frac{1}{2}$ p:℞ 80449 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica 287 $\frac{1}{2}$ m:℞ 80449 $\frac{1}{4}$ p:1,ſed ℞ primæ quantitatis, eſt numerus rerum,quia eſt ℞ totidem quadratorum, & ℞ tertiæ quantitatis eſt numerus,quia tertia quantitas eſt numerus,habemus igitur 1 quadratum p:numero,æqualia rebus & numero,minue minorem numerum de maiore, accipiendo ℞,id eſt accipiendo ℞ denominatoris & numeratoris,habebis 1 quadratum p:hoc numero toto,m:numero infraſcripto æq̃lia numero rerũ,huic ſcilicet, ℞ uniuerſaliſsima ℞ v:cu-

℞ v:cubica 287 $\frac{1}{2}$ p:℞ 80449 $\frac{1}{2}$ p:℞ v cubica 287 $\frac{1}{2}$ m:℞ 80449 $\frac{1}{4}$ p:4
30
℞ v: ma ℞ v: cu.2300 p:℞ 5148752 p:℞ v:cu.2300 m:℞ 5148752 m:4

bicæ 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148752 m: 4, nec refert,quod numerus ille ſit compoſitus ex p: & m: nam tantum refert dicere, 1 quadratum p:8,æquatur 6 rebus, quantum dicere 1 quadratum p:10 m: 2, æquatur 6 rebus, ſequere igitur capitulum quintum, de quadrato & numero, æqualibus rebus, ducendo dimidium numeri rerum in ſe,& auferendo numerum æquationis, inde reſidui ſumendo ℞ uniuerſaliſsimam, quam addes dimidio nume

ri re-

ti rerum, & habebis rem quæ fuit media quantitatum proportionalium quæſitorum.

Qvæstio vi.

Inuenias numerum, qui ſit æqualis radici ſuæ quadratæ, & duabus radicibus cubicis pariter acceptis, dices igitur ſi talis numerus fuerit cu'quadratum radix ſua quadrata neceſſario eſt 1 cubus, & duæ radices cubicæ ſunt 2 q̄d. igitur 1 cu'q̄dratum, æquabitur 1 cubo p: 2 q̄dratis, deducendo igitur ad inferiores denominationes per q̄d. erit 1 q̄d'q̄dratum æquale 1 poſitioni p: 2, poſui aũt 2 radicibus cubicis, quia cum regula ſit generalis, hoc tamẽ modo dupliciter ſolui poteſt, ut patebit. Namq; ſi 1 q̄d'q̄dratum æquatur 1 poſitioni p: 2, igitur 1 q̄d'q̄dratum m: 1 æquabitur 1 poſitioni p: 1, nam ab æqualibus æqualia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 poſitionem p: 1, communem diuiſorem, habebis 1 cubum m: 1 q̄drato p: 1 poſitione m: 1, æqualia 1, igitur 1 cubus p: 1 poſitione, æquatur 1 quadrato p: 2, igitur ex 18° capitulo, rei æſtimatio eſt ℞ v: cubica ℞ $\frac{2241}{2916}$ p: $\frac{47}{54}$ m: ℞ v: cub. ℞ $\frac{2241}{2916}$ m: $\frac{47}{54}$ p: $\frac{1}{3}$, & cu'q̄dratũ huius eſt numerus quæſitus, cuius ℞ quadrata, & 2 radices cubicæ ſunt illi æquales, & tales radices ſunt duplum quadrati huius quantitatis cum ſuo cubo.

1 q̄d'q̄d. m: 1
1 poſ. p: 1
———
1 poſ. p: 1
———
1 cu. m: 1 q̄d. p: 1 poſ. m: 1
1
———

At regula generali ſic faciemus quia enim 1 q̄d'q̄dratum æquatur 1 poſitioni p: 2, addemus ad utramq; partem, 2 poſitiones quadratorum, cui ſubſcripſimus q̄d. ut intelligas non eſſe ex genere priorum denominationum, ſed eſſe poſitiões quadratorũ, igitur numerus addendus, eſt 1 quadratum numeri q̄dratorum, & hoc eſt, ut in tertia regula huius capituli, quadratum D F, nam hic additio ſupplementorum eſt ut D C, A C, D E, ad quadratũ ſimplex A D, igitur ſufficit addere quadratũ D F, abſq; additione ſuperficierum F L & M N, quæ erant neceſſariæ in exemplo quintæ quæſtionis, quia igitur additis 2 poſitionibus p: 1 quadrato numeri quadratorum, ad 1 poſitionem p: 2, fit totum 2 poſitiones numeri q̄dratorum p: 1 poſ. p: 2, p: 1 quadrato numeri quadratorum, & hoc habet radicem, oportet ut quadratum dimidij mediæ quantitatis, quæ eſt 1 poſitio, æquetur

1 q̄d'q̄d. p: 2 poſ. p: 1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.
2 poſ. p: 1 poſ. p: 2 p: 1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.
———
$\frac{1}{4}$ q̄d. 4 poſ. p: 2 cub.
numeri q̄d.
———
$\frac{1}{4}$ æquatur 2 cu. p: 4 poſ.
$\frac{1}{8}$ æq̄tur 1 cu. p: 2 poſ.
———

tur ductui extremorum, igitur $\frac{1}{4}$ quadrati, æquabitur quadrato, 2 cuborum p: 4 poſitionibus numeri prioris, quare abiectis quadratis utrinq;, fiet $\frac{1}{4}$ æqualis 2 cubis p: 4 poſitionibus, & $\frac{1}{8}$ ęqualis 1 cubo p: 2 poſitionibus, quare rei æſtimatio eſt ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, hic igitur eſt numerus quadratorum addendus utriq; parti, & duplicatur, & quadratum huius erit numerus addendus ad utramq; partē, & gratia clarioris intelligentię appoſui hic.

Prima 1 q̄d'q̄d. p: q̄d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: 1 $\frac{1}{3}$.

Secunda q̄d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: 1 poſ. p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$

Manifeſtum eſt igitur, quod ℞ primi, eſt 1 q̄d. p: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, & radix ſecundi, eſt res ℞ v^ma ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2071}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero ℞ v^ma ℞ v: cubicæ $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ & hoc, ut dixi, q̄a latus A D q̄drati, cōponitur ex A B & B C, lateribus q̄dratorū extremorū, abſq; cōmemoratione ſupplementorum. Manifeſtum eſt etiam, quòd numerus, qui eſt cū 1 q̄d. eſt minor numero qui eſt cū rebus, igitur habebimus 1 q̄dratū ęq̄le rebus ℞ v^ma ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu^ca ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero, hoc ℞ v^ma ℞ v: cubicę $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$. Quare ducemus dimidium numeri rerum in ſe, & eſt, ut ducamus totum in ſe, & fit idem, dempta ℞ v^ma, deinde accipiemus quartam partem producti, & eſt dimidium ultimæ ℞ v: quæ eſt m: ſupra poſitæ, ideo addita, relinquetur numerus totus compoſitus ℞ v^ma ℞ cu. v: $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cub. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, & radix huius totius v^ma, addita dimidio numeri rerū, id eſt huic numero ℞ v^ma ℞ v: cubicæ ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, conſtituit rem.

Et ſi dixiſſet, quòd numerus propoſitus ęquaretur radici quadratæ & cubicæ pariter acceptis, non potuiſſet ſolui, niſi hoc ſecundo modo, per regulam generalem. Deducere autem æſtimationes æquales ad idem, ut primam æſtimationem ad ſecundam, iam te docui in libro quantitatum irrationalium, quamuis ſit difficillima operatio, & ideo complementum in his operationibus, eſt quaſi extremum, ad quod peruenit perfectio humani intellectus, uel potius imaginationis, in hoc em̄ cognoſces illorū differentiā.

Qvæstio vii.

Si quis igitur dicat, inuenias numero qui ductus in ℞ cubicam ſuam p:6, faciat 64, dices igitur, poſito eo numero 1 cubo, habebimus 1 q̄d q̄dratum p:6 cubis æqualia 64, quare per ſeptimam tranſmutandi regulam ſeptimi capituli huius habebimus 1 q̄d'q̄d. æquale 6 rebus p:4, unde habita æſtimatione ex hoc capitulo per nonam regulam eiuſdem capituli, habebimus intentum. Et quibuſdam adeo uidebuntur difficiles hæ operationes, ut uix eas ueras eſſe credant, nos autem oſtendimus modum, quo quantitates iſtæ irrationales æquiualentes numeris, ad numeros reducantur, & dedimus demonſtrationē utramq;, & Geometricam à cauſa, & Arithmeticam ab effectu.

Qvæstio viii.

Fac ex 6 tres partes proportionales, quarum quadrata primæ & ſecundæ iuncta ſimul faciant 4, ponemus primam 1 poſitionem, quadratum eius eſt 1 quadratum, reſiduum igitur ad 4, eſt quadratum ſecundæ quantitatis, id eſt 4 m:1 quadrato, huius radicem, & 1 poſitionem detrahe ex 6, habebis tertiam quantitatem, ut uides, quare ducta prima in tertiã, habebis 6 poſitiones m:1 quadrato m:℞ v:4 quadratorũ m:1 q̄d'q̄d° ęqualia 4 m:1 q̄d q̄drato ſecundæ, abijce 1 q̄dratum m:ex partibus, habebis 4 ęqualia 6 poſitionibus m:℞ v:4 quad. m:1 q̄d'q̄drato, quare 6 poſitiones m:4 æquantur ℞ v:4 quadratorum m:1 q̄d'q̄drato, quare quadrata horum etiam æqualia ſunt, à quibus abijce 4 quadrata cõmunia, ex utraq; parte, habebis tandem 32 quadrata p:16 p:1 q̄d'q̄drato, æqualia 48 poſitionibus, quare addendo 240 utriq; parti, id eſt reſiduum quadrati dimidij numeri quadratorum, habebis 1 q̄d'q̄dratum p:32 quadratis p:256, æqualia 48 poſitionibus p:240, addes igitur 2 poſitiones quadratorum p:1 quadrato p:32 poſitionibus numeri quadratorum utriq; parti, prima igitur pars habent radicem neceſſario, & quia uolumus ſecundam etiam habere, quæ eſt 2 poſitiones quadratorum p:48 poſitionibus, ex prioribus

1 poſ. | v:℞ 4 m:1 q̄d. | 6 m:1 poſ. m:℞ v:4 m:1 q̄d.
6 poſ. m:1 q̄d. m:℞ v:4 q̄d. m:1 q̄d'q̄d.

4 | 6 poſ. m:℞ v:4 quad. m:1 q̄d'q̄d.
6 poſ. m:4 æqual. ℞ v:4 quad. m:1 q̄d'q̄d.
36 quad. p:16 m:48 poſ. æquantur
4 quad. m:1 q̄d'q̄d.

32 quad. p:16 p:1 q̄d'q̄d. æqualia 48 poſ.

1 q̄d'q̄d. p:32 quad. p:256 æqualia 48
poſ. p:240

bus p: 1 quadrato p: 32 poſitionibus numeri quadratorum p: 240, ducemus primam partem trinomij in tertiam ut uides, & dimidium ſecundæ in ſe, & fient 576 quadrata æqualia 2 cub. p: 64 quadratis p: 480 poſ. quadratorū igitur 288 æquantur 1 cubo p: 32 quadratis, p: poſ. 240, quare per 17 capitulum huius, habebimus 1 cubum æqualē 101 $\frac{1}{3}$ rerum p: 420 $\frac{16}{27}$, inde habita huius ęſtimatione per ſuum capitulum, minue 10 $\frac{2}{3}$, tertiam partem numeri quadratorum, ut in eo 17° capitulo habes, & conſurgit rei fictæ æſtimatio, habebis igitur 1 quadratū p: 16 p: dicta æſtimatione, ex una parte, æqualia rebus quæ ſunt ℞ dupli æſtimationis inuentæ p: ℞ aggregati ex quadrato dictæ æſtimationis, & eadem ęſtimatione ducta per 32, & 240 numero addito, hoc autem ut liquet, eſt minus priore numero, quia ſi loco 240 adderentur 256, eſſent æquales, igitur 1 quadratum p: æſtimatione inuenta p: 16 m: ℞ v: illa trium quantitatum, id eſt quadrati æſtimationis cum eadem ducta per 32, & cum 240 tanꝗ uno numero, æquantur rebus quæ ſunt ſecundum radicem dupli æſtimationis inuentæ, quod eſt propoſitum.

576 | quad.
2 poſ. p: 48 poſ. p: 1 q̄d. p: 32 poſ. p: 240
quad. numeri quad.
2 cub. p: 64 quad. p: 480 poſ. | q̄d.

Qvæstio IX.

Inuenias numerum, cuius q̄d'q̄dratum, cum quadruplo ſui, & 8 ęquetur decuplo ſui quadrati, dicemus igitur 1 q̄d'q̄dratum p: 4 poſ. p: 8, æquantur 10 quadratis. Quare ſemper poſitiones dabimus quadratis, & auferemus à q̄d'q̄drato, & habebimus 1 q̄d'q̄dratū p: 8, æquale 20 quadratis m: 4 poſitionibus, & quia uidemus numerum quadratorum eſſe magnum, & rerum paruū, ideo conabimur minuere numerum quadratorum potius, quâm augere, & faciemus ut diminutio ſit ex utraque parte 2 quad. nam à minori imò à 2 quadratis ſemper fermè eſt incipiendū, quia non oportet ut ūenias ad m: quad. ex parte rerum, quia ſic non haberent radicem, ſubductis igitur 2 quadratis ex utraq; parte, habebis

1 q̄d'q̄d. p: 4 poſ. p: 8
10 q̄d.
1 q̄d'q̄d. p: 8 | 10 q̄d. m: 4 poſ.
1 q̄d'q̄d. m: 2 q̄d. p: 8
8 q̄d. m: 4 poſ.
1 q̄d'q̄d. m: 2 q̄d. p: 1
8 q̄d. m: 4 poſ. m: 7
2 poſ. | 1 q̄d. p: 2 poſ.
1 q̄d'q̄d: m: 2 poſ. m: 2
q̄d. p: 1 q̄d. p: 2 poſ. p: 1
8 q̄d. m: 2 poſ. q̄d. m: 4
poſ. p: 1 q̄d. p: 2 poſ. m: 7

8 m:2 poſ.q̃d.	4 poſ.	1 q̃d. p:2 poſ.m:7
4 quad.		8 m: 2 poſ.

8 q̃d.p:16 poſ.m:56 m:2 cu.m:4 quad.
p:14 poſ. quad.

4 quad. p: 30 poſ. | 60 p: 2 cub.

1 cub. p:30 æquatur 2 quad. p:15 poſ.

poſ. 2

habebis 1 q̃d'q̃dratum m:2 quadratis p:8, æqualia 8 quadratis m: 4 poſitionibus, clarum eſt aũt, quòd ſi 1 q̃d' q̃dratum m: 2 quadratis debet habere radicem, oportet ut numerꝰ ſit p:1, ſed erat p:8, igitur oportebit auferre 7 ex utraq; parte, habebimus igitur 1 q̃d'q̃dratum m:2 quadratis p:1, æquale 8 quadratis m:4 poſitionibus m:7, addemus igitur per m: ut dictum eſt, 2 poſitiones quadratorum ad reliqua 2 q̃drata m: ex regula, & addemus per p: ut in eadẽ, ad numerum 1 q̃dratũ p:2 poſitionibus ex utraq; parte, quare habebimus partes æq̃les, quæ enim adduntur & minuuntur ſunt æq̃lia, igitur 8 m:2 poſitionibus quadratorum m:4 poſitionibus, p:1 quadrato p:2 poſitionibus m:7 numeri, habent radicem, multiplicando igitur primam partem, quæ eſt 8 m:2 poſitionibus quadratorum, in tertiam, quæ eſt 1 quadratum p:2 poſitionibus m:7, fit illud quod uides à latere, pro numero quadratorum, & hoc æquale eſſe debet 4 quadratis, qui eſt numerus productus, ex dimidio mediæ partis in ſe, quare abijciendo quad. utrinq;, fiet illud multinomium, æquale 4, quare tandem reductis partibus ad ſuas conſimiles erunt 2 cubi p:60, æquales 4 quadratis p:30 poſitionibus, & 1 cubus p:30, æqualia 2 quadratis p: 15 poſitionibus, quare res ualet 2, uel per capitulum, uel etiam ſolo ſenſu experiendo.

Circa quod notanda ſunt tria. Primum, quod reduxi rem ad experimentum in numeris, ut uideres ueritatem rei facilius, ſtultum eſt enim ſemper difficultatem addere difficultati, ſecundum, quod 1 cubus p:30 ęqualis 2 q̃d.p:15 rebus, habet aliam rei ęſtimationẽ quàm 2, quæ cognita eſt ex ſuo capitulo, ſed pro nunc ne operatio longior euadat, eam relinquimus. Tertium notandum eſt, quod tu uides, demonſtrationem ſic tenere in m: ſicut in p: & quod numerus ſemper eſt addendus neceſſario, quia conſurgit ex quadrato numeri quadratorum cum numero quadratorum priorum, ſeu quadrata ſint addenda ſeu minuenda, ducto in dimidium numeri quadratorum minuendorũ. Hoc ſtante, diximus quod rei æſtimatio eſt 2, & addendæ ſunt 2 res per m: quadratorũ, igitur minuemus 4 quadrata ex utraq; parte, habebimus igitur 1 q̃d'q̃dratum m:6 q̃dratis p:1, æqualia 4 qua- Notᵃ.

 dratis

dratis m:4 poſitionibus m:7, pro numero autem addendus eſt quadratus numeri dimidij quadratorum detractorum, & hoc dimidium eſt 2, quadratū cuius eſt 4, & ſimiliter productum ex numero priorum quadratorum in rei æſtimationem, quod productum eſt 4, igitur addemus 8 utriq; parti, & fient tandem ut uides, 1 q̄d'q̄dratum m:6 q̄dratis p:9, ęqualia 4 q̄dratis m: 4 poſitionibus p: 1, manifeſtum eſt autem quod ambo hæc habent radices duplices, ut uides, ſed facta reductione ueniunt neceſſario ad duo capitula, uel 1 q̄dratum æquale 2 poſitionibus p:2, uel 1 quadratum p:2 poſitionibus æqualia 4, horū capitulorum æſtimationes ſunt ℞ 3 p:1, & ℞ 5 m:1, dico igitur quòd in æſtimationibus 1 q̄d'q̄drati p: 4 poſitionibus p:8, æquantur 10 quadratis, cuius probationis experimentum habes à latere dilucidum, ut patet, non declaro autem, an facta alia poſitione perueniremus ut dixi, cum 1 cubus p:30, ęquabatur 2 quadratis p:15 rebus, ad alias duas æſtimationes, ſed ſi te delectat operatio, per te ipſum potes illud inquirere.

1 q̄d'q̄d. m: 2 q̄d. p: 1
m:4 quad. p: 8

1 q̄d'q̄d. m:6 q̄d. p: 1
8 quad. m: 4 poſ. m: 7
m:4 quad. p: 8
4 q̄d. m: 4 poſ. p: 1

1 q̄d'q̄d. m:6 q̄d. p: 9 —	1 quad. m: 3 3 m: 1 quad.
4 quad. m:4 quad. p: 1 —	2 poſ. m: 1 1 m: 2 poſ.
1 q̄d. æqual. 2 poſ. p: 2	℞ 3 p: 1
1 q̄d. p: 2 poſ. æqual. 4	℞ 5 m: 1

p[a] æſtimatio	2[a] æſtimatio
res ℞ 3 p: 1	res ℞ 5 m: 1
quad. 4 p: ℞ 12	quad. 6 m: ℞ 20
q̄d'q̄d. 28 p: ℞ 768	q̄d'q̄d. 56 m: ℞ 2880
4 res ℞ 48 p: 4	4 res ℞ 80 m: 4
q̄d'q̄d. ℞ 768 p: 28 p: 8	q̄d'q̄d. m: ℞ 2880 p: 56 p: 8
aggreg. ℞ 1200 p: 40	aggreg. 60 m: ℞ 2000
10 quad. 40 p: ℞ 1200	10 q̄d. 60 m: ℞ 2000

Quæstio x.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum ſit 8, & quadratum tertij, ſit æquale aggregato ex quadratis primi & ſecundi, ponemus eos per primam regulam 1, 1 poſ. 1 quad. erunt igitur quadrata 1, 1 quadratum, 1 q̄d q̄d. igitur 1 q̄d'q̄d. æquatur 1 q̄drato p: 1, quare ex capitulo deriuatiuorum 24°, habebimus rei æſtimationem ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia quantitas, eſt eius quadratum, ſcilicet ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & prima fuit 1, igitur totum aggregatum eſt 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$

$1\frac{1}{4}$,p:℞ v:℞ $1\frac{1}{4}$p:$\frac{1}{2}$,hoc aūt non eſt 8,ut propoſitū eſt,dic igitur per regulam trium quantitatū, ſi $1\frac{1}{2}$ p:℞ $1\frac{1}{4}$ p:℞ v:℞ $1\frac{1}{4}$p:$\frac{1}{2}$ eſſet 8,qd eſſet 1 prima quātitas? duc 8 in 1,fit 8,diuide 8

1	p^{a}
$\frac{1}{2}$p: ℞ $1\frac{1}{4}$	3^{a}
℞ v:℞ $1\frac{1}{4}$p: $\frac{1}{2}$	2^{a}
$1\frac{1}{2}$p:℞ $1\frac{1}{4}$p:℞ v:℞ $1\frac{1}{4}$p:$\frac{1}{2}$	

per $1\frac{1}{2}$p:℞ $1\frac{1}{4}$p:℞ v:℞ $1\frac{1}{4}$p:$\frac{1}{2}$,& exit 4 p:℞ v:℞ 500 p:10 m:℞ v:℞ 1920 p:18,& hæc eſt prima quantitas, qua habita ſi duxeris eam per ℞ $1\frac{1}{4}$p:$\frac{1}{2}$,habebis tertiam quantitatem, quā ſi duxeris denuo in primam quantitatem ultimo inuentarum,℞ v^{ma} producti,eſt ſecunda quantitas,& ne mireris quod tertiam quantitatem præponam ſecundæ in operatione,quia eſt longe ſimplicior.

Qvæstio xi.

Si quis dicat,inuenias numerum,qui ductus in ℞ ſuam cubicam m:3,faciat 64.Pones illum 1 cubum,igitur ductus in ℞ cubicam m:3 producit 1 q̄d'q̄dratum m:3 cubis,æqualia 64, igitur 1 q̄d'q̄dratum m:3 cubis,æquatur 64,dico quod poſſumus ſoluere modo ſeptimæ quæſtionis,& etiam alio modo,ſine tranſmutatione,quo poteſt etiam ſolui ſeptima quæſtio,& facilius,ſed uolui docere ambos modos, ut melius ſcires operari,debes igitur ſcire duo.Primum,quòd ut res debent ſemper manere ab alia parte,à qua eſt numerus cum quadratis, & non à parte q̄d'q̄drati,ſic cubi,ſeu p:ſeu m: debent manere cū q̄d'q̄drato.Secundum,quòd ut numerus rerum nunq̄ debet uariari, ſic nec numerus cuborū.Et poſſumus addere tertium his, ſcilicet, quòd ubi ſunt res,peruenimus ad 1 q̄d'q̄dratum p:quad.p:numero,æqualia quad. rebus p:uel m:& numero p:ſic hic peruenimus ad q̄d'q̄dratum p:quad.p:numero, æqualia q̄d'q̄d. cubis p: uel m: & quad. p: Hoc intellecto, ſic ſoluitur quæſtio,addes ad numerum 2 poſitiones q̄dratorū, igitur ducto eius dimidio in ſe,fit 1 q̄dratum numeri quadratorumquadratorū,diuiſo igitur eo per 64,habes $\frac{1}{64}$ q̄d. numerū q̄d^{ti}q̄dratorū, quare uides,q̊d addidiſti ad habendam radicem $\frac{1}{64}$ quad. pro numero q̄d'q̄d. & 2 poſitiones pro numero quad. igitur addes eadem ad 1 q̄d'q̄dratum m: 3 cubis, & habebis $\frac{1}{64}$ quadrati p:1,pro numero q̄d'q̄d. & m:3 cubis & 2 poſitionibus,pro numero quad. igitur ad hoc ut habeat radicem,oportet ut extrema inuicem ducta,producant,quantum dimidiū mediæ quantitatis in ſe,eſt autem dimidium $1\frac{1}{2}$ cubi,quod ductum in ſe,producit $2\frac{1}{4}$ cu'quadrata,& $\frac{1}{64}$ quadrati p:1 numeri q̄d'q̄d. in 2 poſitiones nu

$\frac{1}{64}$q̄d. p:1 q̄d'q̄d.	m:3 cu.	p:2 poſ. q̄d.	$\frac{1}{64}$q̄d. q̄d'q̄d.	2 poſ. q̄d.	64

meri quad. producit $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 poſitionibus numeri cu'quadrati, nã q̄d'q̄dratum in quadratum, producit cu'quadratum, habes igitur $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 poſitionibus numeri cu'q̄d. æqualia $2\frac{1}{4}$ cu'q̄dratis, igitur ut cu'q̄dratum, ad cu'q̄dratum in æqualitate, ſic numerus ad numerum, quare $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 poſitionibus, æqualia $2\frac{1}{4}$, quare 1 cubus p: 64 poſitionibus æqualia 72, quare rei æſtimatio, p: ℞ v: cubica ℞ 1 1005 $\frac{1}{27}$ p: 36, m: ℞ v: cubica ℞ 11005 $\frac{1}{27}$ m: 36, & duplum huius pro q̄dratis addetur utriq; parti, radix igit̃, ex una parte eſt 8 p: rebus ſub numero æſtimationis rei, ex alia aũt q̄drata ſub numero ℞ v: $\frac{1}{64}$ q̄drati, huius æſtimatiõis addito 1, m: poſitionibus ſub numero ℞ dupli huius æſtimationis.

Qvæstio XII.

Si quis dicat, 1 q̄d'q̄dratum p: 3, æquatur 12 rebus, addes 2 poſitiones quadratorum, & 1 quadratum numeri quadratorum, quare ſic habebit ℞ quadratam ſine numero ut clarum eſt, igitur addemus ex alia parte pro numero quadratorum 2 poſitiones, & pro numero 1 quad. m: 3 habebis partes ut uides, quare multiplicatis partibus, habes 2 cubos æquales 6 rebus p: 36, & 1 cubum, æqualem 3 rebus p: 18, & res ualet 3, igitur partes ſunt ut uides, & erit 1 quadratum p: 3, ℞ primæ partis, æqualis rebus ℞ 6 p: numero ℞ 6, & res quæſita erit, ℞ v: ℞ 6 m: $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{2}$.

1 q̄d'q̄d. p: 3 | 12 poſ.
2 poſ. quad. p: 1 quad. m: 3

1 q̄d'q̄d, p: 2 poſ. p: 1 q̄d. | 2 poſ. | 12 | 1 q̄d. m: 3
1 q̄d'q̄d. p: 6 quad. p: 9 | 6 quad. p: 12 poſ. p: 6

Qvæstio XIII.

Inuenias numerum, cuius q̄d'q̄dratum cum duplo cubi, ſit 1 p: ipſo numero, igitur dices, 1 q̄d'q̄dratum p: 2 cubis æquantur ad 1 poſitionem p: 1, hic non datur locus radici ſubtrahendæ, nec diuiſioni. Sed dices ex prima regula, inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum ad aggregatum ſecundi & tertij eandẽ habeãt rationem, quam aggregatum ſecundi & tertij ad primum. Pones igitur eos 1, 1 poſ. 1 quad. habebis igitur 1 q̄d'q̄dratum p: 2 cubis p: 1 quadrato, æqualia 1 quadrato p: 1 poſitioni p: 1, quare abiecto 1 quadrato communi, habebimus 1 q̄d'q̄dratum p: 2 cubis, æqualia 1 poſitioni p: 1, ergo iam ſcimus rationem quantitatum, quia uero ex aggregato in primam, fit quadratum aggregati ſecundæ & tertiæ, igitur tale aggregatum eſt diuiſum ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema, & eius minor portio eſt 1, igitur reſiduum (& eſt maior portio) eſt ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & hoc ęquatur (ut ſupponitur) 1 q̄drato p: 1 poſitione, igitur quantitates ſunt ut uides.

Mediæ

Mediæ igitur quantitatis (quæ eſt res) 1 q̄d'q̄dratum p: 2 cubis æquantur ipſi quantitati p: 1, id eſt ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & per hęc intelligis modos harū regularū, ſi exempla hæc diligenter cum ſuis operationibus animaduertas.

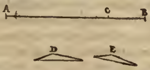
prima	1
2ª res	℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
3ª q̄d.	℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: 1 m: ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$

De modis ſuppoſitionum generalium ad artem maiorem pertinentibus & regulis quæ extra ordinem ſunt, ac æſtimationibus diuerſi generis ab his quæ dictæ ſunt. Cap. XL.

Cum fuerit cubus æqualis quadratis & numero, ſi ab æſtimatione illa detrahatur, numerus quadratorum, relinquetur æſtimatio cubi & totidem quadratorum, ęqualium numero exiſtenti in proportione eadem cum numero primæ æquationis in qua eſt ipſa ſecunda æquatio ſeu æſtimatio ad primam æſtimationem. Exemplum, cubus æquatur 2 quadratis p: 1 $\frac{17}{64}$, & æſtimatio eſt 2 $\frac{1}{4}$, dico, quod ſi abijcias 2 numerum quadratorū relinquetur $\frac{1}{4}$, æſtimatio cubi & 2 quadratorum, æqualium $\frac{9}{64}$, qui numerus eſt in eadem proportione cum 1 $\frac{17}{64}$ numero prioris æquatiōis, in qua eſt $\frac{1}{4}$ æſtimatio ſecunda, ad 2 $\frac{1}{4}$ primam æſtimationem, cuius demonſtratio ſit hæc. p.ª

Demonstratio.

Ponatur A B æſtimatio prima, & A C numerus quadratorum, & erit B C æſtimatio alicuius cubi & quadratorum, ſecundum A C numerum æqualium alicui numero, qui ſit E, ponatur uero D numerus, qui cum quadratis A B ſecundum numerum A C æquetur cubo A B, quia igitur cubus A B æquatur producto ex A C & C B in quadratum A B, itemq́ producto ex A C in quadratū A B cū numero D, erit D æqualis producto C B in A B quadratum, & ſimiliter cubus C B cum producto A C in quadratum C B, æquatur E numero,



& æquatur etiam producto ex A B in quadratum B C, igitur productū A B in quadratum B C, æquatur E, uerum producti B C in quadratum A B, ad productum A B in quadratum B C, ut A B ad B C ex demonſtratis in ſeptimo ſuper Euclidem, proportio igitur D ad E, ut A B ad B C, quod erat probandum, ſimiliter ſequitur, permutando proportiones æquationum numerorum ad ſuas æſtimationes eaſdem eſſe, cum æſtimationum differentia fuerit numerus quadratorum.

2ª Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, item cubus æqualis totidem quadratis eidemq́ꝫ numero, erit proportio aggregati ex prima æſtimatione & numero quadratorum, ad reſiduum, quod fit detracto à ſecunda æſtimatione numero quadratorum, ut ſecundę æſtimationis ad primam duplicata, uelut ſi dicam, cubus & 3 quadrata, æquantur 20, & cubus æquatur 3 quadratis p: 20, in prima æſtimatio rei eſt 2, in ſecũda eſt ℞ v: cubica 11 p: ℞ 120 p: ℞ v: cubica 11 m: ℞ 120 p: 1, dico quòd ſi addas 3 numerum quadratorũ, ad 2 primam æſtimationem (& fiet 5) & minuas idem 3, ex ſecunda æſtimatione (& fiet ℞ v: cu. 11 p: ℞ 120 p: ℞ v: cu. 11 m: ℞ 120 m: 2) quod proportio 5 ad hanc radicem, eſt uelut ℞ v: cubicæ 11 p: ℞ 120 p: ℞ v: cubica 11 m: ℞ 120 p: 1, æſtimationis ſecundæ, ad 2 æſtimationem primam, duplicata, cuius rei eſt demonſtratio hæc.

DEMONSTRATIO.

Sit æſtimatio prima B C, ſecunda A B, numerus quadratorum communis, A D, quia igitur cubus A B, æqualis eſt productis A D & D B in quadratum A B, & A B eſt numerus quadratorum, erit productum ex D B in quadratum A B, æquale numero æquationis, quare & cubo B C cum producto A D in quadratum B C, igitur quod ex B D in quadratum A B, æquale eſt ei, quod ex aggregato A D & C B in quadratum C B, igitur ex 34^a 11^i & 7^a 6^i elementorum, A D & C B, iunctorum, ad B D, uelut A B ad B C, ratio ſeu proportio duplicata.



3ª Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, conuertetur capitulum in capitulum rerum æqualium cubo & numero, & æſtimatio ſecunda ſemper eſt addenda uel detrahenda tertiæ parti numeri quadratorum, ut habeatur prima, & modus eſt, ſume differentiam numeri æquationis propoſiti, & dupli cubi Tp̄q̄d. & eã pone pro numero, qui cum cubo æquatur rebus totidem, quotus eſt numerus, qui eſt tertia pars quadrati numeri quadratorum, ergo inuenta ſecunda æſtimatione, pro habenda prima, addes eã Tp̄q̄d. ſi numerus fuit maior duplo cubi Tp̄q̄d. uel minues, ſi numerus fuit minor duplo cubi Tp̄q̄d. & conflatum uel reſiduum, eſt æſtimatio prima.

Exemplum, Cubus & 80, æquantur 9 quadratis, dupla cubum 3, qui eſt Tp̄q̄d. fit 54, differentia cuius ab 80 eſt 26, igitur cubus p: 26, æquabitur 27 rebus, eſt autem 27 tertia pars q̄drati 9, igitur æſtimatio ſecunda eſt 1, quæ addita ad 3 Tp̄q̄d: conſtituit 4, æſtimationẽ primã, qa numerus qui eſt 80, eſt maior duplo cubi Tp̄q̄d. quod eſt 54.

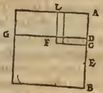
Aliud exemplum, Cubus p: 5, æquatur 6 quadratis, duc 6 in ſe

fit 36,

fit 36,huius tertia pars eſt 12,numerus rerum,inde detrahe 5,numerũ æquationis,ex 16 duplo cubi 2 τpq̃d.& relinquitur 11,igitur 1 cub. p:11,æquatur 12 rebus,æſtimatio autem eſt 1, detrahe igitur 1 ex 2 τpq̃d. quia numerus eſt minor duplo cubi τpq̃d.relinquitur æſtimatio cubi p:5 æqualis 6 quad.

DEMONSTRATIO.

Demonſtratio autem huius eſt,ponatur A B numerus quadratorum 9,A C æſtimatio rei, cuius cubus p: 80 æquatur A B ductæ in A F quadratum A C,& ſit A D tertia pars A B,& ſimiliter D E & E B & A G ſuperficies æquidiſtantium laterum, & tertia pars quadrati A B ex prima 6[1],quia igitur ex B A in A C,fit cubus A F p:80,erit quod ex B C in A F 80,quod igitur ex B D in A F, 80 p:eo quod ex C D in A F, detracto igitur quod ex B D in A H, & eſt duplum cubi A D,fiet quod ex B D in gnomonẽ,



26 p:eo quod ex C D in A F, at quod ex B D in gnomonem, æquale eſt quadruplo C D in quadratum A H,& duplo A D in quadratum H F, eo quod lineæ B E,E D,D A,D H,& reliquæ ſuplementorum ſunt æquales inuicem,quadruplum igitur C D in quadratum A H cum duplo A D in quadratum H F,æquatur 26 p:eo quod ex C D in F A, at ex C D in F A, fit cubus C D,& duplum A D in quadratum F H,& C D in quadratũ A H ſemel,igitur ablato eo quod ex C D in quadratum A H ſemel,& ex A D in quadratum H F bis,utrinque,erit triplum C D in A H,æquale cubo C D p:26,at quod ex C D in A H ter,ęquale eſt ei,quod ex C D in A G ſemel, cum D H ſit tertia pars D G, igitur quod ex C D in A G tertiam partem quadrati A B,æquale eſt cubo ipſius C D p:26.

Cum quæſtionis ſolutio ad multitudinem denominationum peruenerit,ſolutio plerunque ſperari poteſt,nam ex mala tractatione ſæpius hoc euenit,unde ad pauciores & notas denominationes deducta ſoluitur,& generaliter. At cum ad capitulum paucarum ſed inæqualiũ denominationũ peruenerit, quæſtionis ſolutio,nunque generaliter ad cognitionem perueniet,cum ſemper in id incidat capitulum, quod uniuerſalem æſtimationis inueniendæ regulam non habet, uelut ſi ad capitulum R[1] P[1], quadratorum,rerum ac numeri deuenerit. 4

Cum uero hoc in omnibus,tum maxime in Geometricis quæſtionibus,quæ graues ſunt,plurimum conferre ſolet,ut præuias alias, ac minus difficiles quæſtiones ſoluas,huius libri auxilio,demum in regulas de modo ſolutiones has contrahes,inde illarum auxilio pedeten- 5

tim procedens per poſitionis præcepta & regulas, ad aliquod tandem horum capitulorum notorum peruenies, ex quo dilucida ſolutio apparebit.

6 Præter has autem æſtimationes, aliæ quædam emergunt, quarum numerus eſt infinitus, nec ullius earum generalis eſt uſus, uerum quæ maxime ſunt frequentes, tribus modis fiunt. Aut em̃ regula particulari, ut in ſexto libro oſtenſum eſt. tum magis in capitulis omnibus quantitatũ continue proportionalium, ut facile eſt experiri. Aliæ autem ex iterata regularum uel capitulorum operatione, Vel mixtione, ut cum ad quæſiti ſolutionem pluribus capitulis, uel regulis indigemus. Exemplum habes, præter reliqua, in quarta quæſtione capituli 35 huius libri, ubi eam quæſtionem ad finem deduxeris, & expreſſius etiam in ſecunda quæſtione 31, capituli huius. Tertio modo habebis uarias æſtimationes, cum capitula uel regulas non in numeris, ſed iam uariatis æſtimationibus exercueris, ut ſi dicam, fac ex ℞ ultimi 8 m: ℞ 2, duas partes, ex quarum ductu in radices alterius mutuo fiant numeri, qui iuncti inuicem faciant 4, operatio perueniet ad abſonam quantitatem.

7 Natura producti ex partibus numeri in ℞ quadratam uel cubam uel alterius generis partis reliquæ, eſt de genere cubi, uel q̃d'q̃drati, excepto quod quantitas ſumenda eſt proximior maxime, non minori. Exemplum, ſi quis dicat, fac ex 10 duas partes, quarum productum unius in quadratum alterius faciat 9, & poſtmodum uelis dicere, fac ex aliquo numero duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat 18, tunc uides quod talis productio eſt ex genere cubi, quia igitur, ſi proportio eſſet eadem, fieret hoc ex 20, quod eſt duplum 10, ut 18 eſt duplum 9, at quia eſt ex genere cubi, inueniemus duos terminos proportionales inter 10 & 20, & ſunt ℞ cubica 2000 & ℞ cubica 4000, igitur numerus quæſitus eſt ℞ cubica 2000, nam una pars eſt ℞ cubica 2 alia ℞ 1458, ducta ℞ cubica 1458 in quadratum ℞ cub. 2 fit ℞ cubica 5832, quæ eſt 18. Dico igitur quod ſi dixiſſet, ut facias de 10 duas partes, ex quarum mutua multiplicatione in ℞ alterius fiat 12, quod hæc habet rationem cubicam, unde ſi diceremus, inuenias numerum ex cuius ductu uicisſim partium in mutuas radices fiat 24, & uelis ex primis partibus inuenire alias, tunc inter 10 & 20 eadem ratione, qui ſe habent ut 9 & 18, accipies in ratione cubica duos terminos medios proportionales, & maior illorum qui eſt ℞ cubica 4000, eſt terminus quæſitus, nam una

9	18
10	20
℞ cu.	℞ cu.
2000	4000

pars

pars eſt ℞ cubica 4, alia ℞ cubica 2916, duc uicisſim in ℞ quadratam alterius fiunt ℞ cubica 5832, & ℞ cub. 216, quæ ſunt 18 & 6, & hæ iunctæ faciunt 24.

Quælibet æquatio cubi æqualis rebus & numero, conuertitur in 8
conſimilem, cuius numerus rerum conſtat ex diuiſione prioris numeri rerum per numerum æquationis, & numerus æquationis eſt ℞ unitatis diuiſæ per numerum æquationis, ut in exemplo, cubus æquetur 6 poſitionibus p: 2, diuide 6 numerum poſitionum per 2 numerum ęquationis, exibit 3 numerus poſitionum ſecundæ æquationis, diuide etiam unitatem per 2 numerum æquationis, exit $\frac{1}{2}$, cuius ℞ eſt numerus æquationis, & ita in duobus reliquis exemplis. Inuentio autem æſtimationis unius per aliam, eſt ualde difficilis, ueruntamen dico, quod habita ſecunda æſtimatione, ipſa erit ℞ numeri rerum multiplicandarum cum unitate per 1 cub. & per poſitiones, & numerum priorem ex alia parte, inde addes tot quadrata utriq; parti, quotus eſt numerus, qui prouenit diuiſa unitate per quadruplum quadrati eiuſdem ſecundæ æſtimationis, & habebis q̄d'q̄dratum p: cubo p: quadrato ex una parte, habentia ℞, quæ erit quad. p: poſ. & ex alia quad. p: poſ. p: numero, habentia ſimiliter radicem, quæ erit poſitio p: numero, quare per capitulum, habebis æſtimationem, ut in tertio exemplo, habes ſecundam rei æſtimationem 1, pro habenda prima duc 1 poſitionem p: 1 (pro regula ſumitˀ 1) ſed 1 poſ. eſt propter quadratum æſtimationis rei, quod fuit etiam 1 in 1 cubum, & 6 poſitiones p: 9, habebis 1 q̄d q̄dratum p: 1 cubo, æqualia 6 quadratis p: 9 p: 15 poſitionibus, deinde adde utriq; parti $\frac{1}{4}$ quadrati, & eſt quod prouenit ſemper diuiſa unitate per quadruplum quadrati numeri poſitionum additarum, & habebis partes habentes ℞ quadratas, quare res eſt 3.

1 cub. æq̄lis 6 poſ. p: 2	
1 cub. æq̄lis 3 poſ. p: ℞ $\frac{1}{2}$	
1 cub. æq̄lis 4 poſ. p: 4	
1 cub. æq̄lis 1 poſ. p: $\frac{1}{2}$	
1 cub. æq̄lis 6 poſ. p: 9	
1 cub. æq̄lis $\frac{2}{3}$ poſ. p: $\frac{1}{3}$	

1 cub.	6 poſ. p: 9
1 poſ. p: 1	1 poſ. p: 1
1 q̄d'q̄d. p: 1 cub.	6 q̄d. p: 15 poſ. p: 9
1 q̄d'q̄d. p: 1 cu. p: $\frac{1}{4}$ q̄d.	6$\frac{1}{4}$ q̄d. p: 15 poſ. p: 9
1 q̄d. p: $\frac{1}{2}$ poſ.	2$\frac{1}{2}$ poſ. p: 3

Quinquies exſcriptus, maneat tot millibus annis.

Artis Magnæ Hiero. Cardani de Regulis Algebri, Finis.

Norimbergæ per Ioh. Petreium excuſum.
Anno M. D. XLV.